Исследовательская работа по математике

тема работы

Вычисление объёмов и площади поверхностей тел при помощи двойного интеграла

Выполнила:
Ученица 11 класса
Дорофеева Виктория Дмитриевна
Руководитель:
Учитель математики
Панарина Ирина Васильевна

п. 12 лет Октября

Оглавление

Введение

История понятия двойного интеграла тесно связана с задачами нахождения квадратур. Задачами о квадратуре той или иной плоской фигуры математики Древней Греции и Рима называли задачи на вычисление площадей. Латинское слово quadratura переводится как “придание квадратной формы”. Необходимость в специальном термине объясняется тем, что в античное время (и позднее, вплоть до XVIII столетия) еще не были достаточно развиты представления о действительных числах. Математики оперировали с их геометрическими аналогами или скалярными величинами, которые нельзя перемножать. Поэтому и задачи на нахождение площадей приходилось формулировать, например, так: «Построить квадрат, равновеликий данному кругу». (Эта классическая задача «о квадратуре круга» не может, как известно, быть решена с помощью циркуля и линейки.)

Многие значительные достижения математиков Древней Греции в решении задач на нахождение квадратур (т. е. вычисление площадей) плоских фигур, а также кубатур (вычисление объемов) тел связаны с применением метода исчерпывания, предложенным Евдоксом Книдским (ок. 408 — ок. 355 до н.э.). С помощью этого метода Евдокс доказал, например, что площади двух кругов относятся как квадраты их диаметров, а объем конуса равен 1/3 объёма цилиндра, имеющего такие же основание и высоту. Метод Евдокса был усовершенствован Архимедом.

С помощью метода исчерпывания, целого ряда других остроумных соображений (в том числе с привлечением моделей механики) Архимед решил многие задачи. Он дал оценку числа π ($3.10/71<\pi<3.1/7$), нашел объемы шара и эллипсоида, площадь сегмента параболы и т. д. Сам Архимед высоко ценил эти результаты: согласно его желанию на могиле Архимеда высечен шар, вписанный в цилиндр (Архимед показал, что объем такого шара равен 2/3 объема цилиндра).

Ответы на многие вопросы, связанные с существованием площадей и объемов фигур, были получены с созданием К. Жорданом (1838—1922) теории меры.

Объемы простых тел, можно вычислить непосредственно, используя материалы школьной программы по математике. Если рассматривать произвольные тела в пространстве, то следует прибегнуть к иным способам вычисления их объема и площадей поверхности. Потребности жизни требуют от учащихся умений вычисления площадей и объемов реальных объектов, а для этого актуален поиск возможностей.

Применение двойного интеграла к вычислению площадей поверхностей и объёмов, значительно расширяет возможности при решении задач.

Изучение теоретических материалов по данной теме дает возможность овладеть понятиями первообразной и интеграла, усвоить связь между ними, овладеть простейшей техникой интегрального исчисления, научится применять интеграл к вычислению площадей фигур, ограниченных графиками функций.

В подтверждение вышесказанного можно привести слова великого французского математика Анри Лебега: «Нет темы более важной: измерение величин является исходным пунктом всех приложений математики. Так как прикладная математика предшествовала, очевидно, чистой, или логике математики, то обычно думают, что начало измерения площадей и объемов лежит у самых истоков геометрии; с другой стороны, измерение доставляет число, то есть предмет изучения анализа. Таким образом, об измерении величин говорят как в средних и старших классах средней школы, так и в высшей школе» (15, С. 18).

Целью данной работы является: рассмотреть понятие двойного интеграла, его основные свойства, изучить методы вычисления двойных интегралов, показать примеры вычислений объёмов и площадей поверхности тел при помощи двойного интеграла.

Для достижения цели необходимо решить следующие задачи:

1. Изучить и проанализировать научную литературу по теме «вычисление объёмов и площадей поверхности тел при помощи двойного интеграла»
2. Выявить основные методы вычисления двойного интеграла.
3. На практике применить способы вычисления объемов тел и площади поверхности при помощи двойного интеграла.

Глава 1 Двойной интеграл

1.1 Определение понятия двойного интеграла

Пусть D – квадрируемая (и, следовательно, ограниченная) область (открытая или замкнутая) на плоскости и пусть в области D определена ограниченная функция *u=f(M)=f(x;y)*. Разобьём область D на n квадрируемых частей D_i(i=1,2,…, n) так, чтобы любые две части не имели общих внутренних точек, в каждой части D_i возьмём произвольную точку $M_i(\xi_i,\eta_i)$ и составим сумму $I(G_i, M_i)=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i$,

Где Δs_i – площадь D_i. Эта сумма называется *интегральной суммой* функции *f(x;y)*, соответствующей данному разбиению области D на части D_i и данному выбору промежуточных точек M_i.

Диаметром ограниченного множества D точек назовём точную верхнюю грань расстояний между двумя произвольными точками этого множества: $sup\ \rho(M',M'')$ $(M'\epsilon D, M''\epsilon D)$.

Пусть d_i – диаметр D_i, $d = \max\limits_{0\le i\le 1} d_i$.

Определение. Число I называется *пределом интегральных сумм* $I(D_i; M_i)$ при $d\to 0$, если $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0$ такое, что для любого разбиения области D, у которого $d < \delta$, и для любого выбора промежуточных точек M_i выполняется неравенство $|\ I(D_i; M_i)-I| < \varepsilon$.

Если существует $\lim\limits_{d\to 0} I(D_i; M_i) = I$, то он называется *двойным интегралом* от функции *f(x;y)* по области D и обозначается $\iint_D f(x;y)dx\,dy$ или $\iint_D f(M)ds$, а функция *f(x;y)* называется *интегрируемой* в области D.

Т е о р е м а 1. *Функция, непрерывная в замкнутой квадрируемой области, интегрируема в этой области.*

Т е о р е м а 2. *Функция, ограниченная в квадрируемой области и непрерывная всюду, кроме некоторого множества точек площади нуль* *(если это множество можно заключить в многоугольник сколь угодно малой площади), интегрируема в этой области.*

Двойные интегралы обладают такими же свойствами, как и определённые интегралы (линейность, аддитивность, формулы среднего значения и др.) $[6, \text{стр.} 279 - 280]$

1.2 Свойства двойного интеграла

Свойство 1 (аддитивность). *Если функция f(x;y) интегрируема в области D и область D при помощи кривой* Γ *меры (площади), нуль разбивается на две связные и не имеющие общих внутренних точек* D_1 и D_2, *то функция f(x;y)интегрируема на каждой из областей* D_1 и D_2, *причём*

$$\iint_D f(x;y)dx\,dy = \iint_{D_1} f(x;y)dx\,dy + \iint_{D_2} f(x;y)dx\,dy.$$

Справедливо и обратное утверждение: *из интегрируемости функции f(x;y) в каждой из областей* D_1 и D_2, *следует её интегрируемость в области D и справедливость приведённой формулы.*

Свойство 2 (линейность). *Если функции f(x;y) и g(x;y) интегрируемы в области D,* α и β *– произвольные вещественные числа, то функция* $\alpha f(x;y) + \beta g(x;y)$ *интегрируема в области D, причем*

$$\iint_D (\alpha f(x;y) + \beta g(x;y))\,dx\,dy = \alpha \iint_D f(x;y)dx\,dy + \beta \iint_D f(x;y)dx\,dy.$$

Свойство 3. *Если функции f(x;y) и g(x;y) интегрируемы в области D,то их произведение f(x;y)·g(x;y) интегрируемо в области D.*

Свойство 4. *Если функции f(x;y) и g(x;y) интегрируемы в области D и в этой области выполняется неравенство f(x;y)* $\leq$ *g(x;y), то* $\iint_D f(x;y)dx\,dy \leq \iint_D g(x;y)dx\,dy$.

Свойство 5. *Если функция f(x;y) интегрируема в области D, то в этой области интегрируема функция | f(x;y)| и выполняется неравенство, причём* $\left|\iint_D f(x;y)dx\,dy\right| \leq \iint_D |f(x;y)|dx\,dy$.

Свойство 6. *Если функция* $f(x;y)$ *интегрируема в области* D, *функция* $g(x;y)$ *ограничена и совпадает с* $f(x;y)$ *всюду в области* D, *за исключением множества точек меры нуль, то* $g(x;y)$ *интегрируема в области* D.

Свойство 7 (теорема о среднем значении). *Если функции* $f(x;y)$ *и* $g(x;y)$ *интегрируемы в области* D, *функция* $g(x;y)$ *неотрицательна (неположительна) всюду в области* D, $M=sup_D\ f(x;y)$, $m=inf_D\ f(x;y)$, *то найдётся число* $\mu\epsilon[m;M]$ *такое, что выполняется равенство* $\iint_D f(x;y)\cdot g(x;y)dx\,dy=\mu\iint_D g(x;y)dx\,dy$.

Если при этом функция $f(x;y)$ *непрерывна в связной области* D, *то в области найдётся такая точка* $(\xi;\eta)$, *что* $\mu=f(\xi;\eta)$.[2, стр. 60 − 62]

1.3 Геометрическая интерпретация двойного интеграла

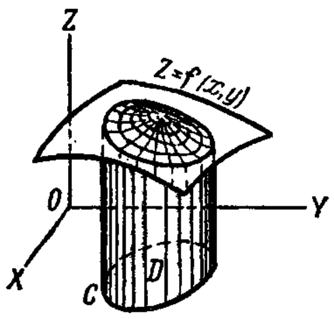


Рис. 1

Обозначим через V объём вертикального цилиндрического тела (рис. 1) образующие которого параллельны оси OZ, нижним основанием которого служит область D, лежащая на плоскости XOY, а верхнее основание которого кривое, представляющее собой кусок поверхности $z=f(x;y)$, прикрывающий сверху рассматриваемое цилиндрическое тело. Если, приняв какое-нибудь разбиение области D на площадки $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2,\ldots, \sigma_{n-1}$, мы выберем точки M_0, $M_1, M_2,\ldots, M_{n-1}$ в них так, чтобы соответствующие аппликаты $f(M_i)$ всегда были *минимальными* в этих площадках, тогда столбики, имеющие σ_i своими основаниями и $f(M_i)$ своими высотами, понятно, будут вписанными в *вертикальные* цилиндры, имеющие σ_i своим нижним основанием и кусок поверхности $z=f(x;y)$ своим верхним основанием. Значит, раз столбик является частью цилиндра, в который он вписан, то объём столбика будет меньше объёма этого цилиндра. И так как объём столбика равен $f(M_i)\cdot \sigma_i$, то отсюда следует, что сумма объёмов всех n столбиков, равная, очевидно, интегральной сумме

$$S= f(M_0)\cdot \sigma_0 + f(M_1)\cdot \sigma_1 + \ldots + f(M_{n-1})\cdot \sigma_{n-1},$$

будет меньше суммы объёмов всех n цилиндров; эта же последняя, очевидно, равна объёму V всего цилиндрического тела. Итак мы находим, что при выборе точек M_0, $M_1, M_2, \ldots, M_{n-1}$, дающих минимальные аппликаты, $S< V$. Поэтому и предел интегральной суммы S не может быть больше, чем V. Следовательно, $\iint_D f(x;y)dx\,dy \leq V$.

Если теперь мы сделаем другой выбор точек $M_0, M_1, M_2, \ldots, M_{n-1}$, выбирая их так, чтобы аппликаты $f(M_i)$ были *максимальными* в площадках σ_i, то рассматриваемые столбики, имеющие основаниями σ_i и высотами $f(M_i)$, будут, очевидно, уже *описанными* около соответствующих цилиндров, и, значит, ступенчатое тело, составленное из столбиков, будет содержать всё цилиндрическое тело. Так как объём ступенчатого тела есть интегральная сумма, то поэтому при таком выборе точек $M_0, M_1, M_2, \ldots, M_{n-1}$ мы получим $S > V$, и значит, $\iint_D f(x;y)dx\,dy \geq V$.

Сопоставление двух предыдущих неравенств даёт: $\iint_D f(x;y)dx\,dy = V$.

Следовательно, *двойной (определённый) интеграл от непрерывной функции* $f(x;y)$ *по области D численно равен объёму вертикального цилиндрического тела, имеющего область D одним своим основанием и кусок поверхности z=f(x;y) другим своим основанием.*

Заметим, что если поверхность $z=f(x;y)$, расположена *под* плоскостью XOY, то двойной интеграл, а стало быть, и объём V тела *отрицательны*, потому что в этом случае функция $f(x;y)$ отрицательна. [16, стр. 319 – 320]

1.4 Основные методы вычисления двойного интеграла

1.4.1 Сведение двойного интеграла к повторному

Вычисление двойного интеграла сводится, при достаточно широких условиях, к последовательному интегрированию по каждой из переменных в отдельности. Основная идея излагаемых ниже теорем состоит в следующем. Будем рассматривать двойной интеграл $\iint_G f(x;y)dxdy$ как объём криволинейного цилиндра *T*, ограниченного снизу областью *G*, сверху поверхностью *z=f(x;y)*, и сбоку цилиндрической поверхностью, проходящей через границу области *G* (рис. 2). Тело *T* можно представлять себе как составленное из бесконечно тонких слоёв, параллельных плоскости *yz*.

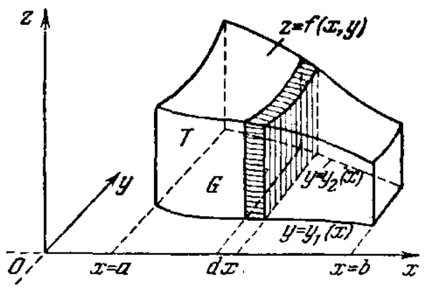


Рис. 2

Объём каждого такого слоя равен *J(x)dx*, т. е. произведению площади *J(x)* соответствующего сечения тела *T* на толщину слоя *dx*. Объём всего тела *T* при этом равен

$$\int_a^b J(x)dx. \qquad (1.1)$$

В свою очередь величина *J(x)* (площадь криволинейной трапеции) представляется интегралом

$$\iint_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x;y)dy, \quad (1.2)$$

где x рассматривается как фиксированная величина, а $y_1(x)$ и $y_2(x)$ – концы того отрезка, который служит проекцией рассматриваемого сечения на плоскость *xy*. Комбинируя (1.1) и (1.2), получаем, что объём тела *T* может быть представлен в виде $\int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x;y)dy$, т. е. что имеет место равенство

$$\iint_G f(x;y)ds = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x;y)dy \quad (1.3)$$

Перейдём теперь к точному изложению. Рассмотрим сначала двойной интеграл по некоторому прямоугольнику со сторонами, параллельными осям координат.

Теорема 1.1. *Если для функции $f(x;y)$, определённой в прямоугольнике P=$\{a \leq x \leq b, c \leq z \leq d\}$, существует двойной интеграл*

$$\iint_P f(x;y)dxdy \quad (1.4),$$

а при каждом фиксированном значении x, $a \leq x \leq b$, существует однократный интеграл $J(x)$= $\int_c^d f(x;y)dy$, то существует повторный интеграл $\int_a^b dx \int_c^d f(x;y)dy$ =$\int_a^b J(x)dx$ и выполняется равенство $\iint_P f(x;y)dxdy$=$\int_a^b dx \int_c^d f(x;y)dy$.

Меняя роли x и y (и предполагая существование интеграла $J_1(y)$ =$\int_a^b f(x;y)dx$), получаем аналогичное равенство $\int_c^d dy \int_a^b f(x;y)dx$)= $\iint_P f(x;y)dxdy$.

Наконец, если наряду с двойным интегралом (1.4) существуют оба интеграла, $J(x)$= $\int_c^d f(x;y)dy$ и $J_1(y)$= $\int_a^b f(x;y)dx$, то

$$\iint_P f(x;y)dxdy = \int_a^b dx \int_c^d f(x;y)dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x;y)dx.$$

Рассмотрим теперь вопрос о сведении двойного интеграла к повторному для случая криволинейной области.

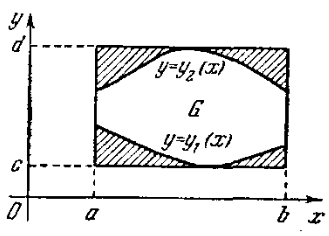


Рис. 3

Пусть область G ограничена двумя непрерывными кривыми y=$y_1(x)$ и y=$y_2(x)$ и вертикальными отрезками x=a и x=b (рис. 3). Тогда справедлива следующая теорема:

Теорема 1.2. *Если для функции* $f(x;y)$*, определённой в области G, существует двойной интеграл* $\iint_G f(x;y)dxdy$*, а при каждом фиксированном значении* $x\epsilon[a,b]$ *существует интеграл* $J(x)=\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x;y)dy$*, то существует повторный интеграл* $\int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x;y)dy$ *и выполняется равенство*

$$\iint_G f(x;y)dxdy=\int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x;y)dy.$$

Геометрический смысл формул, сводящих двойной интеграл к повторному, состоит в том, что объём тела равен интегралу от площади его поперечного сечения (представляющей собой функцию той переменной, которая определяет положение секущей плоскости). [5, стр. 46 – 51]

1.4.2. Замена переменных в двойном интеграле

К замене переменных часто приходится прибегать при интегрировании функции одной переменной. Не менее важную роль играет замена переменных и при вычислении двойных интегралов. Прежде чем заняться вопросом о замене переменных в двойном интеграле, мы должны будем изложить некоторые сведения об отображении областей.

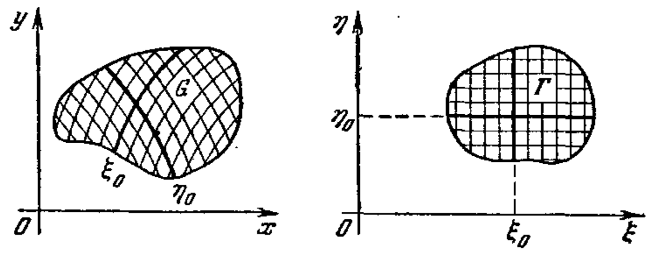


Рис. 4

Рассмотрим две плоскости с декартовыми координатами x, y и ξ, η соответственно и предположим, что в плоскости xy выделена некоторая замкнутая ограниченная область G с границей L, а в плоскости $\xi\eta$ –замкнутая ограниченная область Г (рис. 4, *а* и *б*) (Области G и Г предполагаются, конечно, квадрируемыми). Предположим, что в области Г определены функции

$$x=x(\xi, \eta),\ y=y\ (\xi, \eta) \qquad (1.5)$$

такие, что, когда точка $(\xi,\ \eta)$ пробегает область Г, соответствующая точка $(x;y)$ пробегает всю область G. Таким образом, функции (1.5) определяют отображение области Г на область G.

Мы предположим, что это отображение удовлетворяет следующим условиям:

1) Отображение *взаимно однозначно*, т. е. различным точкам области Г отвечают обязательно различные точки области G. Иными словами, мы предположим, что существуют решения

$$\xi=\xi(x;y),\ \eta=\eta(x;y) \qquad (1.6)$$

уравнений (1.5) относительно ξ и η, однозначные во всей области G.

2) *Функции* (1.5) *и* (1.6) *непрерывны и имеют непрерывные частные производные первого порядка.*

3) *Функциональный определитель (якобиан)*

$$\frac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)}=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial y} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix} \qquad (1.7)$$

всюду в области Г *отличен от нуля,* а следовательно, поскольку входящие в этот якобиан производные предполагаются непрерывными, *сохраняет в* Г *постоянный знак.*

Якобиан $\frac{D(\xi,\eta)}{D(x,y)}$ обратного отображения (1.6) связан с якобианом (1.7) соотношением $\frac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)}\cdot\frac{D(\xi,\eta)}{D(x,y)}=1$, непосредственно вытекающим из определения произведения определителей и правила дифференцирования сложной функции, поэтому $\frac{D(\xi,\eta)}{D(x,y)}$ также нигде не обращается в нуль.

Сформулируем теперь задачу о замене переменных в двойном интеграле. Пусть G – замкнутая область, ограниченная кусочно-гладкой кривой L, и $f(x;y)$ – заданная в G функция, непрерывная или имеющая разрывы, лежащие на множестве площади нуль, и ограниченная. Пусть, далее функции (1.5) определяют отображение на область G некоторой области Г, удовлетворяющее условиям 1) – 3). Задача состоит в том, чтобы интеграл $\iint_G f(x;y)dxdy$, взятый по области G, представить, преобразовав в нём подынтегральное выражение к новым переменным ξ и η, в виде интеграла по области Г.

При выводе формулы замены переменных в двойном интеграле основной шаг состоит в том, чтобы выразить через криволинейные координаты площадь области. Здесь имеет место следующая теорема:

Теорема 1.3. *Пусть $x=x(\xi,\ \eta)$, $y=y\ (\xi,\ \eta)$ – взаимно однозначное, непрерывное и непрерывно дифференцируемое отображение области* Г *на область G, якобиан которого отличен от нуля. Тогда*

$$G=\iint_G dxdy=\iint_\Gamma \left|\frac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)}\right| d\xi d\eta. \quad (1.8)$$

Полученное нами выражение (1.8) площади в криволинейных координатах позволяет легко найти и общую формулу замены переменных в двойном интеграле. Рассмотрим интеграл

$$\iint_G f(x;y)dxdy, \quad (1.9)$$

где область G ограничена кусочно-гладким контуром L, а функция $f(x;y)$ или непрерывна в этой области (включая границу) всюду, или же ограничена в ней и непрерывна всюду, кроме некоторого множества площади нуль.

Пусть функции $x=x(\xi,\ \eta)$ и $y=y\ (\xi,\ \eta)$ определяют соответствие между точками области G и точками некоторой области Г, удовлетворяющее всем тем предложениям, при которых была установлена формула (1.8) выражающая площадь области G в криволинейных координатах. Разобьём область Γ на части Γ_i некоторой системой кусочно-гладких кривых. Соответствующие им кусочно-гладкие кривые разобьют область G на части G_i площади ΔS_i. Выбрав в каждой из этих частей G_i произвольную точку $(x_i; y_i)$, составим интегральную сумму

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i; y_i)\Delta S_i \qquad (2.0)$$

отвечающую интегралу (1.9).

Применив к каждой из частичных областей G_i формулу (1.8), получим

$$\Delta S_i = \iint_{\Gamma_i} \left|\frac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)}\right| d\xi d\eta.$$

Обозначив якобиан символом $J(\xi,\eta)$ вместо $\frac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)}$ и воспользовавшись теоремой о среднем, будем иметь $\Delta S_i = |J(\xi_i^*,\eta_i^*)|\Delta\sigma_i$, где $\Delta\sigma_i$ – площадь области Γ_i. Заменив в интегральной сумме (2.0) каждую из величин ΔS_i найденным выражением, получим $\sum_{i=1}^{n} f(x_i; y_i)\,|J(\xi_i^*,\eta_i^*)|\Delta\sigma_i$.

Точка (ξ_i^*,η_i^*) получается в результате применения теоремы о среднем, и выбор её в каждой из частичных областей Γ_i от нас не зависит. Напротив, точка $(x_i; y_i)$ выбирается в каждой из частичных областей G_i совершенно произвольно. Поэтому мы можем положить $x_i = x(\xi_i^*,\eta_i^*)$, $y_i = y(\xi_i^*,\eta_i^*)$, т. е. выбрать ту точку области G_i, которая соответствует точке (ξ_i^*,η_i^*) области Γ_i. Тогда рассматриваемая интегральная сумма примет вид $\sum_{i=1}^{n} f(x(\xi_i^*,\eta_i^*), y(\xi_i^*,\eta_i^*))|\,J(\xi_i^*,\eta_i^*)|\Delta\sigma_i$, а это не что иное, как интегральная сумма для интеграла

$$\iint_{\Gamma} f(x(\xi,\eta), y(\xi,\eta))|J(\xi,\eta)|\ d\xi d\eta. \quad (2.1)$$

Этот интеграл существует, так как подынтегральная функция в области Γ либо непрерывна, либо ограничена и непрерывна в Γ всюду, кроме точек некоторого множества, имеющего площадь нуль. Если теперь неограниченно измельчить разбиение области Γ на части Γ_i, то в силу непрерывности соответствия, диаметры областей G_i также будут стремиться к нулю. При этом рассматриваемая интегральная сумма должна стремиться, с одной стороны, к двойному интегралу (1.9), а с другой – к интегралу (2.1). Следовательно эти интегралы равны

$$\iint_G f(x;y)dxdy = \iint_\Gamma f(x(\xi,\eta), y\,(\xi,\eta))|J(\xi,\eta)|\ d\xi d\eta. \quad (2.2)$$

Это и есть формула замены переменных в двойном интеграле.

Итак, *если G – замкнутая ограниченная область с кусочно-гладкой границей и* $f(x;y)$ *– заданная в этой области функция, непрерывная всюду или же ограниченная и непрерывная всюду, кроме некоторого множества площади нуль, и если формулы x=x(ξ, η), y=y (ξ, η) устанавливают соответствие между точками области G и точками некоторой области* Γ *в плоскости ξη, удовлетворяющее условиям 1)-3), то имеет место формула замены переменных* (2.2).

В двойном интеграле, как и в однократном, замена переменных – важнейший способ приведения интеграла к виду, более удобному для его вычисления.

В то время как для однократного интеграла замена переменных делается лишь с целью упрощения подынтегрального выражения, при вычислении двойных интегралов стремятся упростить не только интегрируемую функцию, но и ту область, по которой берётся интеграл. Последнее обстоятельство настолько важно, что иногда имеет смысл пойти даже на некоторое усложнение подынтегральной функции, но зато получить простую область интегрирования. $[5, \text{стр}. 54 - 68]$

Глава 2 Некоторые приложения двойных интегралов: вычисление площадей и объёмов с помощью двойного интеграла

2.1 Вычисление площади плоской поверхности

Площадь плоской поверхности вычисляется по формуле $S = \iint_D dx\, dy$.

Пример 1. Вычислить площадь плоской поверхности *D*, ограниченной прямой *y* = *2* и параболой *y* = $x^2 - 1$.

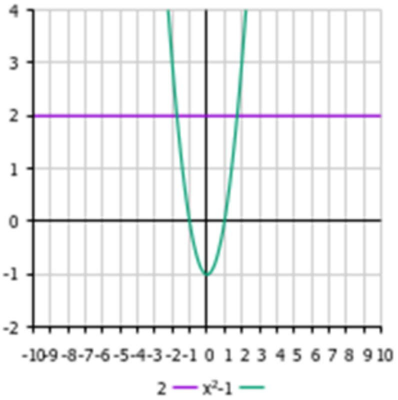


Рис. 5

Решение: Область *D* можно проектировать н ось *Ox* и на ось *Oy*. Спроектируем её на ось *Oy* (см. рис. 5).

Область *D* симметрична относительно оси *Oy*, поэтому достаточно вычислить площадь правой половины области *D* и результат удвоить. Правая половина области *D* проектируется на ось *Oy* в отрезок $[1; 2]$ и имеет в левой границе прямую *x* = *0*, а в правой – линию *y* = $x^2 - 1$ или *x* =$\sqrt{y+1}$.

В результате получим:

$S_{\frac{1}{2}} = \int_{-1}^{2} dy \int_0^{\sqrt{y+1}} dx = \int_{-1}^{2} (x \mid_0^{\sqrt{y+1}}) dy = \int_{-1}^{2} \sqrt{y+1}\, dy = 2\sqrt{3}.$

Откуда $S = 4\sqrt{3}$ (кв. ед.).

Или $S_{\frac{1}{2}} = \int_0^{\sqrt{3}} dx \int_{x^2-1}^{2} dy = \int_0^{\sqrt{3}} (y \mid_{x^2-1}^{2}) dx = \int_0^{\sqrt{3}} (2 - x^2 + +1) dx =$

$= \int_0^{\sqrt{3}} (3 - x^2) dx = 3x \mid_0^{\sqrt{3}} - \frac{x^3}{3} \mid_0^{\sqrt{3}} = 3\sqrt{3} - \frac{3\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$, откуда

$S = 4\sqrt{3}$ (кв. ед.).

Ответ: $4\sqrt{3}$ кв. ед.

Пример 2. Найти площадь области *D*, ограниченной гиперболами $y = \frac{a^2}{x}$ и

$y = \frac{2a^2}{x}$ *(a>0)* и вертикальными прямыми $x = 1$, $x = 2$.

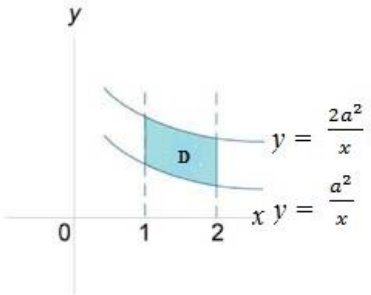


Рис. 6

Решение: Изобразим схематически область D (рис. 6).

$$S = \iint_D dx\,dy = \int_1^2 dx \int_{\frac{a^2}{x}}^{\frac{2a^2}{x}} dy =$$

$$= \int_1^2 \left(y \,\Big|_{\frac{a^2}{x}}^{\frac{2a^2}{x}} \right) dx = \int_1^2 \left(\frac{2a^2}{x} - \frac{a^2}{x} \right) dx =$$

$$= a^2 \int_1^2 \frac{dx}{x} = a^2(\ln 2 - \ln 1) = a^2 \ln 2 \text{ (кв. ед.)}$$

Ответ: $a^2 \ln 2$ кв. ед.

2.2 Вычисление объемов тел

Пример 3. Найти объём тела D в первом октанте, ограниченного плоскостями *y=0, z=0, z=x, z+x=4.*

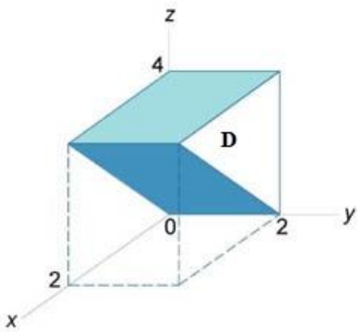


Рис. 7

Решение: Изобразим схематически область D (рис. 7).

Заметим, что при построении основание тела D является квадратом. Для заданных *x, y* значение *z* изменяется от *z=x* до *z =4-x*. Тогда объём равен: $V = \iint_D \big((4 - x) - x\big) dx\,dy =$

$$= \int_0^2 dx \int_0^2 (4 - 2x) dy = \int_0^2 \left((4y - 2xy)\,\Big|_0^2\right) dx =$$

$$= \int_0^2 (8 - 4x) dx = (8x - 2x^2)\,\Big|_0^2 = 16 - 8 = 8 \text{ (куб. ед.)}$$

Ответ: 8 куб. ед.

Пример 4. Найти объём тела D ограниченного поверхностями *z=0,* $x+y=1$, $x^2+y^2=1$, *z=1-x.*

Решение: Изобразим схематически область D. Построим рисунки 8.1 и 8.2.

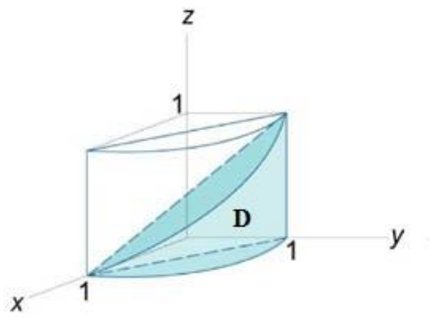


Рис. 8.1

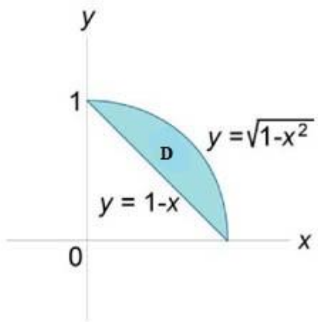


Рис. 8.2

Заметим, что в области интегрирования D при $0 \le x \le 1$ значения y изменяются от $1-x$ до $\sqrt{1-x^2}$. Сверху тело ограничено плоскостью $z=1-x$. Следовательно, объём данного тела равен $V = \iint_D (1-x)dx\,dy =$ $=\int_0^1 dx \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} (1-x)dy = \int_0^1 ((1-x)y \Big|_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}})\,dx = \int_0^1 (1-x)(\sqrt{1-x^2} -$ $-1+x)\,dx = \int_0^1 (\sqrt{1-x^2} - x\sqrt{1-x^2} - 1 + 2x - x^2)dx = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} -$ $-\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}dx - \int_0^1 (1+2x-x^2)dx.$

Обозначим $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx = I_1$, $\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}dx = I_2$, $\int_0^1 (1+2x-x^2)dx = I_3$.

$I_1 = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx = \left\langle \begin{matrix} x=\sin t \\ dx=\cos t dt \end{matrix} \quad \begin{matrix} t=0 \text{ при } x=0 \\ t=\frac{\pi}{2} \text{ при } x=1 \end{matrix} \right\rangle = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t dt =$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2} dt = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2t)dt = \frac{1}{2}\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} +\right.$ $\left.+\frac{\sin\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4};$

$I_2 = \int_0^1 x\sqrt{1-x^2}dx = \left\langle \begin{matrix} u=1-x^2 \\ du=-2xdx \end{matrix} \; xdx = -\frac{du}{2} \quad \begin{matrix} u=1 \text{ при } x=0 \\ u=0 \text{ при } x=1 \end{matrix} \right\rangle = -\frac{1}{2}\int_1^0 \sqrt{u}du =$

$=\frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{u}du = \frac{1}{2}\int_0^1 u^{\frac{1}{2}}du = \frac{1}{2}\left(\frac{2u^{\frac{3}{2}}}{3}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{3};$

$I_3 = \int_0^1 (1+2x-x^2)dx = \left(x - x^3 + \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 = 1 - 1 + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$

Получим $V = I_1 - I_2 - I_3 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{3} \approx 0{,}12$ (куб. ед.)

Ответ: $\approx 0{,}12$ куб. ед.

Пример 4. Вычислить объём единичного шара.

Решение: Уравнение сферы радиусом 1 имеет вид $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. В силу симметрии ограничимся нахождением объёма верхнего полушара и затем результат умножим на 2. Уравнение верхней полусферы имеет вид $z = \sqrt{1-(x^2+y^2)}$. Преобразуя это уравнение в полярные координаты, получим $z(r;\theta) = \sqrt{1-r^2}$. В полярных координатах область интегрирования D описывается множеством D $= \{(r;\theta) | 0 \le r \le 1,\ 0 \le \theta \le 2\pi\}$. Следовательно, объём верхнего полушария выражается формулой $V_{\frac{1}{2}} = \iint_D \sqrt{1-r^2}\, r\, dr\, d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \sqrt{1-r^2}\ r\, dr =$ $= 2\pi \int_0^1 \sqrt{1-r^2} dr = \left\langle {t=1-r^2 \atop dt=-2rdr}\ \ rdr = -\frac{dt}{2}\ \ {t=1 \text{ при } r=0 \atop t=0 \text{ при } r=1} \right\rangle = 2\pi \int_0^1 \sqrt{t}\,(-\frac{dt}{2}) =$ $= -\pi \int_0^1 \sqrt{t} dt = \pi \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 = \frac{2\pi}{3}$.

Таким образом, объём единичного шара $V = 2V_{\frac{1}{2}} = \frac{4\pi}{3}$ (куб. ед.)

Ответ: $\frac{4\pi}{3}$ куб. ед.

2.3 Вычисление площади поверхности

Пример 6. Вычислить площадь поверхности сферы радиуса a.

Решение: Рассмотрим верхнюю полусферу. Её уравнение имеет вид $x^2 + +y^2 + z^2 = a^2$ или $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$. Очевидно область интегрирования D представляет собой круг с таким же радиусом a, расположенный в центре координат. Площадь поверхности полусферы вычисляется по формуле $S_{\frac{1}{2}}=\iint_D\sqrt{1+(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2}dx\,dy$.

Найдём частные производные

$\frac{\partial z}{\partial x}=(\sqrt{a^2-x^2-y^2})'_x=\frac{-2x}{2\sqrt{a^2-x^2-y^2}}=-\frac{x}{z}$;

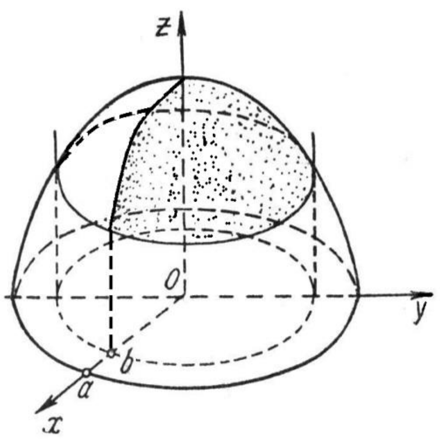
$\frac{\partial z}{\partial y}=(\sqrt{a^2-x^2-y^2})'_y=\frac{-2y}{2\sqrt{a^2-x^2-y^2}}=-\frac{y}{z}$. Подставляя производные, получим $S_{\frac{1}{2}}=\iint_D\sqrt{1+\frac{x^2}{z^2}+\frac{y^2}{z^2}}dx\,dy=\iint_D\sqrt{\frac{z^2+x^2+y^2}{z^2}}dx\,dy=\iint_D\frac{a}{z}\,dx\,dy$.

Преобразуем двойной интеграл в полярные координаты

$S_{\frac{1}{2}}=\iint_D\frac{a}{z}\;dx\;dy\;=\int_0^{2\pi}\int_0^a\frac{a}{\sqrt{a^2-r^2}}r\;dr\;d\theta\;=\;a\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a\frac{rdr}{\sqrt{a^2-r^2}}\;=$
$-2\pi\int_0^a\frac{d(a^2-r^2)}{2\sqrt{a^2-r^2}}=\;=-2\pi a\left(\sqrt{a^2-r^2}\right)\Big|\begin{smallmatrix}a\\0\end{smallmatrix}\;=-2\pi a(0-a)\;=\;2\pi a^2$(кв. ед.)
Площадь поверхности полной сферы, соответственно, равна $S=2S_{\frac{1}{2}}=4\pi a^2$ (кв. ед.)

Ответ: $4\pi a^2$ кв. ед.

Пример 7. Найти площадь поверхности, вырезанную цилиндром $x^2+y^2==b^2$ из сферы $x^2+y^2+z^2=a^2$, считая, что $a>b$.



Решение. Вычислим $\frac{1}{8}$ часть искомой площади, расположенную в первом октанте (см. рис. 9).

Целесообразно спроектировать вычисляемую поверхность на плоскость *xOy*. Проекцией будет четверть круга, ограниченного окружностью $x^2+y^2=b^2$.

Рис. 9 Уравнение сферы решим относительно переменной z. Из условия задачи $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$.

Найдём частные производные

$\frac{\partial z}{\partial x} = (\sqrt{a^2 - x^2 - y^2})'_x = \frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$;

$\frac{\partial z}{\partial y} = (\sqrt{a^2 - x^2 - y^2})'_y = \frac{-y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$.

Поэтому $\sqrt{1 + (\frac{\partial z}{\partial x})^2 + (\frac{\partial z}{\partial y})^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2-x^2-y^2} + \frac{y^2}{a^2-x^2-y^2}} = \sqrt{\frac{a^2}{a^2-x^2-y^2}} =$

$= \frac{a}{\sqrt{a^2-(x^2+y^2)}}$.

$S_{\frac{1}{8}} = \iint_D \frac{a}{\sqrt{a^2-(x^2+y^2)}} dx\, dy$, где D – четверть круга.

Введем полярные координаты: $x^2 + y^2 = \rho^2$. Радиус окружности, как видно из уравнения $x^2 + y^2 = b^2$, равен b. Полярный угол φ изменяется в области интегрирования от 0 до $\frac{\pi}{2}$.

Получим $S_{\frac{1}{8}} = \iint_D \frac{a}{\sqrt{a^2-(x^2+y^2)}} dx\, dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^b \frac{a}{\sqrt{a^2-\rho^2}} \rho d\rho = \int_0^{\frac{\pi}{2}}(-$

$-\frac{a}{2}\int_0^b (a^2-\rho^2)^{-\frac{1}{2}} d(a^2-\rho^2))d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-\frac{a}{2} \frac{(a^2-\rho^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \Big|_0^b \right) d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big(-a(a^2 -$

$-b^2)^{\frac{1}{2}} + a^2\Big) d\varphi = a(a - \sqrt{a^2 - b^2}) \frac{\pi}{2} = \frac{\pi a}{2}(a - \sqrt{a^2 - b^2})$ (кв. ед.)

Таким образом $S = 8\frac{\pi a}{2}(a - \sqrt{a^2 - b^2}) = 4\pi a\,(a - \sqrt{a^2 - b^2})$ (кв. ед.)

Ответ: $4\pi a\,(a - \sqrt{a^2 - b^2})$ кв. ед.

Заключение

В заключение, нужно отметить, что роль интеграла в развитии современной науки огромна. Интеграл используется в таких науках как физика, геометрия, математика и других науках. При помощи интеграла вычисляют работу силы, находят координаты центр масс, путь, пройденный материальной точкой. В геометрии используется для вычисления объема тела, нахождение длины дуги кривой и др.

При написании курсовой работы нами была изучена специальная литература, включающая в себя статьи и учебники по математическому анализу, описаны теоретические аспекты и раскрыты ключевые понятия двойного интеграла, его основные свойства, изучены методы вычисления двойных интегралов, рассмотрено практическое применение различных примеров вычислений объёмов и площадей поверхности тел при помощи двойного интеграла.

Список используемой литературы

1. Акбаров С.С. Математический анализ [Текст] /С. С. Акбаров// Черновик учебника по математическому анализу, который автор надеется опубликовать в обозримом будущем. 2016. – 942с .
2. Воронина Б.Б. Математический анализ.[Текст]/Б.Б. Воронина// конспект лекций, 2007. – 160с.
3. Бермант А.Ф., Араманович И.Г., Краткий курс математического анализа. [Текст]/А. Ф. Бермант, И. Г. Араманович// Санкт-Петербург, Москва, Краснодар 2005. – 736с.
4. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа. [Текст]/ Г. Н. Берман// Уч. Пособие. Изд-во «Профессия» Санкт-Петербург, 2005. – 432 с.
5. Будак Б. М., Фомин С. В. Кратные интегралы и ряды [Текст] / Б. М. Будак, С. В. Фомин// Наука ГРФМЛ. 1965. – 608с.
6. Бутузов В. Ф., Крутицкая Н. Ч., Медведев Г. Н., Шишкин А. А. Математический анализ в вопросах и задачах [Текст]/ В. Ф. Бутузов , Н. Ч. Крутицкая, Г. Н. Медведев, А. А. Шишкин / Физматлит 2001. -480 с.
7. Виленкин Н. Я., Бохан К. А., Марон И. А. и др. Задачник по курсу математического анализа. Ч. 1[Текст] /Под ред. Н. Я. Виленкина. //Учеб.пособие для студентов заочн. отделений физ.-мат. фак-тов пединститутов. – М., «Просвещение». 1971. – 343.
8. Виленкин Н. Я., Куницкая Е. С., Мордкович А.Г. Математический анализ. Интегральное исчисление [Текст] / Н. Я. Виленкин, Е. С. Куницкая, А. Г. Мордкович// - М., Просвещение, 1979. – 177с.
9. Григорьева О.Ю. , Нечаев И.Д. Кратные и криволинейные интегралы [Текст] / учебно-методическое пособие /– Барнаул : АлтГПУ, 2015. – 86 с.
10. Злобина, С. В., Посицельская Л. Н. Математический анализ в задачах и упражнениях [Текст] / С. В. Злобина, Л. Н. Посицельская // учебное пособие. – М., 2009. – 360с.

11. Ивлев В.В. Математический анализ : функции многих переменных [Текст]/ В.В. Ивлев// учебное пособие. Моск. гос. гуманитар. ун-т им. М.А. Шолохова. — М. : Икар, 2013. — 546с.
12. Ильин В.А., Садовничий В.А., Бл. Х. Сендов. Математический анализ. В 2-х частях [Текст]/ В.А. Ильин/ Изд. 2-е перераб. Издательство МГУ Часть 2. 1987. – 358с.
13. Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа (в двух томах). Том 2 [Текст]/ Л. Д. Кудрявцев// Высшая школа. – М., 1981. – 584с.
14. Кукушкин Б. Н., Быкова О. Н., Колягин С. Ю. Практикум по математическому анализу [Текст] / Б. Н. Кукушкин, О. Н. Быкова, С. Ю. Колягин// Учеб. пособие для студ. высш. учеб. заведений. – М., 2014. – 276с.
15. Курант Р. Курс Дифференциального исчисления. Том 2 [Текст] / Р. Курант// Наука, ГРФМЛ. 1970. – 671с.
16. Левитас Г. Г. Введение в геометрию [Текст] //Математика в школе. 1990. - №6. – С. 21-22.
17. Лузин Н. Н. Интегральное исчисление. [Текст]/ Н. Н. Лузин// Высшая Школа, Изд. 7-е. 1961. – 416 с.
18. Лунгу К.Н., и др. Сборник задач по высшей математике. Часть 2[Текст]/ К. Н. Лунгу// учебное пособие для студентов 2-го курса. Айрис-пресс, М., 2007. – 593с.
19. Просветов Г. И. Математический анализ. Задачи и решения. [Текст] / Г. И. Просветов / Бином. Лаборатория знаний. 2008. – 208с.
20. Садовнничая И.В.,Хорошилова Е.В. Определеннй интеграл: теория и практика вычислений. [Электронный ресурс]. http://ph4s.ru/book/mat/matan. /2008/ html
21. Фалалеев М. В. Математический анализ. В 4 ч. Ч.4. [Текст]/ М. В. Фалалеев//учебное пособие. Изд-во Иркут. гос. ун-та. Иркутск. 2013. – 113с.

22. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.3 [Текст]/ Г. М. Фихтенгольц// Физматлит – М., 2003. – 728с.

Приложения

Пример 1. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями: $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$, $x = c$, $x = d$ $(c < d)$, $y = e$, $y = f$ $(e < f)$, $z = 0$.

Решение.

Поверхностями, ограничивающими тело, являются (см. **рис. 1**):

- эллиптический параболоид: $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$;
- плоскости, параллельные плоскости yOz: $x = c$, $x = d$;
- плоскости, параллельные плоскости xOz: $y = e$, $y = f$;
- плоскость xOy: $z = 0$.

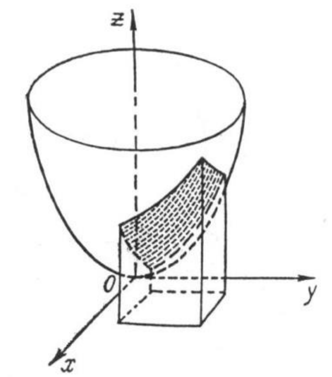
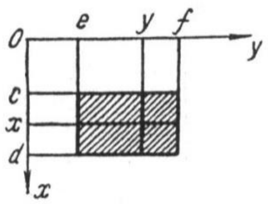


Рис. 1

Объем его вычисляется по формуле $V = \iint\limits_D f(x, y)dxdy$. Подставляя в эту формулу значение $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$, ограничивающее тело сверху, имеем $V = \iint\limits_D \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) dxdy$. На плоскости xOy тело вырезает прямоугольник D, ограниченный прямыми линиями $x = c$, $x = d$, $y = e$, $y = f$ (см. **рис. 2**).



Первые две параллельны оси Oy, вторые две – оси Ox. В этом случае пределы интегрирования в повторном интеграле – величины постоянные. Порядок интегрирования в данном случае безразличен.

Рис. 2

$$V=\int_e^f dy\int_c^d\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)dx=\int_e^f\left(\frac{x^3}{3a^2}+\frac{xy^2}{b^2}\right)\Bigg|_c^d dy=\int_e^f\left(\frac{d^3}{3a^2}+\frac{dy^2}{b^2}-\frac{c^3}{3a^2}-\frac{cy^2}{b^2}\right)dy=$$

$$\int_e^f(d-c)\left(\frac{d^2+cd+c^2}{3a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)dy=(d-c)\int_e^f\left(\frac{d^2+cd+c^2}{3a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)dy=$$

$$(d-c)\left(\frac{d^2+cd+c^2}{3a^2}y+\frac{y^3}{3b^2}\right)\Bigg|_e^f=\frac{(d-c)(f-e)}{3}\left(\frac{d^2+cd+c^2}{a^2}+\frac{e^2+ef+f^2}{b^2}\right)\text{ (куб.ед.)}$$

Ответ: $V=\dfrac{(d-c)(f-e)}{3}\left(\dfrac{d^2+cd+c^2}{a^2}+\dfrac{e^2+ef+f^2}{b^2}\right)$ (куб.ед.)

Пример 2. Найти площадь поверхности, вырезаемую на сфере $x^2+y^2+z^2=a^2$ цилиндром $x^2+y^2-ay=0$.

Решение. Вычислим $\frac{1}{4}$ часть искомой площади, расположенную в первом октанте (см. **рис. 3**).

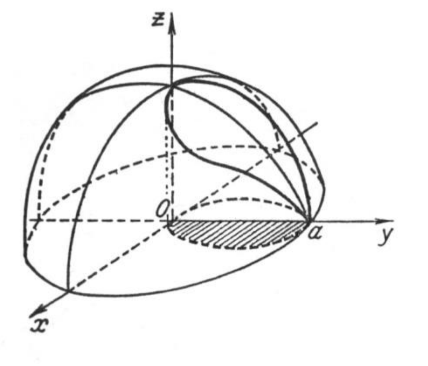


Рис. 3

Целесообразно спроектировать вычисляемую поверхность на плоскость xOy. Проекцией будет полукруг, ограниченный окружностью $x^2+(y-\frac{a}{2})^2=\frac{a^2}{4}$. Как и в предыдущем *примере 4*, уравнение сферы решим относительно переменной z.

Из условия задачи $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$. Определим частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$: $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$. Поэтому $\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\frac{a}{\sqrt{a^2-(x^2+y^2)}}$.

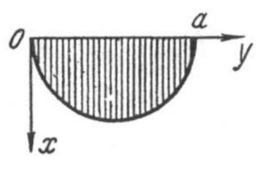


Рис. 4

Введем полярные координаты. Область интегрирования ограничена окружностью, уравнение которой $\rho=a\sin\varphi$ (см. **рис. 4**)

$$S1=\iint\limits_{(D)}\frac{a}{\sqrt{a^2-(x^2+y^2)}}dxdy=\int\limits_0^{\pi/2}d\varphi\int\limits_0^{a\sin\varphi}\frac{a}{\sqrt{a^2-\rho^2}}\rho d\rho=\int\limits_0^{\pi/2}d\varphi\left(-\frac{a}{2}\frac{(a^2-\rho^2)^{1/2}}{1/2}\Big|_0^{a\sin\varphi}\right)=$$

$$=\int\limits_0^{\pi/2}d\varphi\left(-a(a^2-a^2\sin^2\varphi)^{1/2}+a^2\right)=a^2\int\limits_0^{\pi/2}(1-\cos\varphi)d\varphi=a^2\,\frac{\pi-2}{2}$$

$S=4\dfrac{a^2}{2}\left(\pi-2\right)=2a^2(\pi-2)$ кв.ед.

Ответ: $S=2a^2(\pi-2)$ кв.ед.