НЕРАВЕНСТВА С ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Автор:

Захарова Юлия Александровна

9 класс МОУ СОШ № 1

Копейского городского округа.

Челябинская область.

Руководитель:

Агалыева Лаиля Ахмедовна.

Учитель математики МОУ СОШ № 1

Копейского городского округа.

Челябинская область.

ВВЕДЕНИЕ

Уравнения и неравенства применяют во многих областях науки, поэтому данная работа поможет разобраться с неравенствами с одной переменной, чтобы анализировать и исследовать, применяя математические методы, процессы и явления в природе и обществе.

Задачи с параметрами традиционно представляют для учащихся сложность в логическом, техническом и психологическом плане. Однако именно решение таких задач открывает перед учащимися большое число эвристических приемов общего характера, применяемых в исследованиях на любом математическом материале.

Школьная базовая программа уделяет мало внимания, решению этих задач, предлагая рассматривать их по большей части факультативно, хотя и в основной программе они, разумеется, присутствуют.

К задачам с параметрами, рассматриваемых в школьном курсе, можно отнести, например, поиск решений линейных и квадратных уравнений и неравенств в общем, виде, исследование количества их корней в зависимости от значений параметров.

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ – два выражения с переменной x и областью определения X. Тогда неравенство вида $f(x) > g(x)$ или $f(x) < g(x)$ называется неравенством с одной переменной. Множество X называется областью его определения.

Значение переменной x из множества X, при котором неравенство обращается в истинное числовое неравенство, называется его решением. Решить неравенство – это значит найти множество его решений. [1]

В основе решения неравенств с одной переменной лежит понятие равносильности.

Два неравенства называются равносильными, если их множества решений равны.

Теоремы о равносильности неравенств и следствия из них аналогичны соответствующим теоремам о равносильности уравнений. При их доказательстве используются свойства истинных числовых неравенств. [2]

Все методы решения линейных уравнений, кроме одного, применимы и к решению линейных неравенств. Можно прибавить или вычесть любое действительное число к обеим сторонам неравенства, а также умножить или разделить обе части на любое положительное действительное число, чтобы получить эквивалентные неравенства.

Их свойства:

1. Если из одной части неравенства перенести в другую слагаемое с противоположным знаком, то получится равносильное ему неравенство.

2. Если обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же положительное число, то получится равносильное ему неравенство.

3. Если обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же отрицательное число, изменив при этом знак неравенства на противоположный, то получится равносильное ему неравенство. [3]

Неравенства довольно актуальны в настоящее время. Ведь с помощью неравенств можно находить область определения функций, задать основные числовые множества, формулировать определения предела, непрерывных функций и целого ряда остальных не менее значимых понятий.

Часто то или иное неравенство служит важным вспомогательным средством, основной леммой, позволяющей доказать или опровергнуть существование каких - то объектов, оценить их количество, провести классификацию. На языке неравенств нередко формулируется постановка задачи во многих приложениях математики. Некоторые неравенства включают в себя переменные. Неравенства с переменными – это такие неравенства, в запись которых входят буквы принимающие разные значения. Они могут при одних значениях переменных быть верными, а при других – нет. Доказать такое неравенство – значит доказать, что оно выполнено при всех допустимых значениях переменных. Многие экономические задачи сводятся к решению и исследованию систем линейных неравенств с большим числом переменных, но чаще всего с двумя или тремя. [6]

Линейные неравенства играют важную роль, например, для специалистов в бизнесе и экономике, так как именно при помощи неравенств есть возможность составлять модели бизнес-процессов, находить выгоду, строить планы в логистике и размещении товаров и услуг.

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

Неравенство – обратная сторона равенства. Понятие неравенства, как и понятие равенства, связано со сравнением двух объектов. И если равенство характеризуется словом «одинаковые», то неравенство, напротив, говорит о различии сравниваемых объектов.

Линейное неравенство — это математическое выражение, которое сравнивает два линейных выражения и объявляет, что одно из них больше или меньше другого. Линейные уравнения с одной переменной — это уравнения, которые записываются в виде $ax + b = 0$, где a и b — два целых числа, а x — переменная, и существует только одно решение. $8x + 3 = 8$, в частности, является линейным уравнением только с одной переменной. В результате у этого уравнения есть только одно решение: $x = \frac{5}{8}$.

В математике общий смысл неравенства сохраняется. Но в её контексте речь идет о неравенстве математических объектов: чисел, значений выражений, значений каких-либо величин (длин, весов, площадей, температур и т.п.), фигур, векторов и т.п. [7]

В алгебре неравенство представляет собой математическое выражение, в котором используется символ неравенства для обозначения связи между двумя утверждениями. Обе стороны знака неравенства имеют разные выражения. Это означает, что выражение в левой части должно быть больше или меньше выражения в правой части, или наоборот. Буквальные неравенства — это когда связь между этими двумя алгебраическими выражениями определяется с помощью символов неравенства. «Неравенство существует, когда два действительных числа или алгебраических выражения связаны символами «>», и «<». Например, $x>3$ (переменная должна быть больше 3)

Смысл слов «больше» и «меньше» мы познаем практически с первых дней нашей жизни. На интуитивном уровне мы воспринимаем понятие больше и меньше в плане размера, количества и т.п. А дальше постепенно начинаем осознавать, что при этом фактически речь идет о сравнении чисел, отвечающим количеству некоторых предметов или значениям некоторых величин. То есть, в этих случаях мы выясняем, какое из чисел больше, а какое – меньше.

Можно привести пример. С утра была зафиксирована температура воздуха 11 градусов Цельсия, а в обед – 24 градуса. Согласно правилам сравнения натуральных чисел, 11 меньше 24, следовательно, значение температуры с утра было меньше, чем ее значение в обед (температура в обед стала больше, чем была температура с утра).

Согласно тому, как мы ввели понятие неравенства, можно описать основные свойства неравенств. Понятно, что объект не может быть не равен самому себе. В этом состоит первое свойство неравенств. Второе свойство не менее очевидно: если первый объект не равен второму, то второй не равен первому.

Существуют общепринятые обозначения для записи неравенств:

- знак «не равно», представляющий собой перечеркнутый знак «равно»: $\neq$. Этот знак располагается между неравными объектами. Например: $5 \neq 10$, то есть пять не равно десяти;
- знак «больше»: $>$ и знак «меньше»: $<$. Первый записывается между большим и меньшим объектами; второй между меньшим и большим. Например, запись о сравнении отрезков вида $|AB| > |CD|$ и $|CD| <$ $<|AB|$ говорит о том, что отрезок AB больше отрезка *C*D.

Знаки строгих неравенств – это знаки «больше»: $>$ и «меньше»: $<$

Неравенства, составленные с их помощью – строгие неравенства. [4]

Знаки нестрогих неравенств – это знаки «больше или равно» и «меньше или равно»: $\geq$ и $\leq$. Неравенства, составленные с их помощью – нестрогие неравенства.

Введенные на некотором множестве понятия «меньше» и «больше» задают на исходном множестве так называемые отношения «меньше» и «больше». Это же относится и к отношениям «меньше или равно» и «больше или равно». Они также обладают характерными свойствами.

Начнем со свойств отношений, которым соответствуют знаки «<» и «>». Перечислим их, после чего дадим необходимые комментарии для пояснения:

- антирефлексивность;
- антисимметричность;
- транзитивность.

Свойство антирефлексивности с помощью букв можно записать так: для любого объекта a неравенства a больше a и a < a – являются неверными.

Свойство антисимметричности утверждает, что если первый объект больше (меньше) второго, то второй объект соответственно меньше (больше) первого. В формальной записи, если a больше b, то b < a, а также, если a <b , то b больше a.

Наконец, свойство транзитивности состоит в том, что из a < b и b < c следует, что a < c, а также, из a больше b и b больше c следует, что a больше c.

Это свойство также воспринимается достаточно естественно: если первый объект меньше (больше) второго, а второй меньше (больше) третьего, то понятно, что первый объект меньше (больше) третьего. [1]

В свою очередь отношениям «меньше или равно» и «больше или равно» присущи следующие свойства:

- рефлексивности: имеют место неравенства a меньше a и a ≥ a (так как они включают в себя случай a=a);
- антисимметричности: если a меньше b, то b ≥ a, и если a ≥ b, то b меньше a;

- транзитивности: из a меньше b и b меньше c следует, что a меньше c, а из $a \geq b$ и $b \geq c$ следует, что $a \geq c$.

Свойство транзитивности, которое было ранее затронуто, позволяет составлять так называемые двойные, тройные и т.д. неравенства, представляющие собой цепочки неравенств. Для примера можно привести двойное неравенство $a < b < c$ и тройное неравенство $q_1 \geq q_2 \geq q_3 \geq q_4$.

Теперь необходимо разобрать, как понимать такие записи. Их следует трактовать в согласии со смыслом содержащихся в них знаков. Например, двойное неравенство $a < b < c$ по сути представляет собой краткую запись трех неравенств $a < b$, $b < c$ и $a < c$, причем третье из них как бы излишне, так как следует из первых двух по свойству транзитивности. Аналогично, указанное выше тройное неравенство $q_1 \geq q_2 \geq q_3 \geq q_4$ можно рассматривать как три основных неравенства $q_1 \geq q_2$, $q_2 \geq q_3$, $q_3 \geq q_4$ и следующих из них неравенств вида $q_1 \geq q_3$, $q_1 \geq q_4$, $q_2 \geq q_3$, $q_2 \geq q_4$ [7]

В заключение заметим, что иногда удобно использовать записи в виде цепочек, содержащих одновременно как знаки равно, не равно, так и знаки строгих и нестрогих неравенств. Например, $x = 2 < y \leq z < 17$.

Определение: неравенство вида

$k * x < b$

где x – переменная , k и b - некоторые числа, называется линейным неравенством с одной переменной.

Следствие из свойств неравенства:

- если к обеим частям неравенства прибавить одно и то же число, то получим неравенство, равносильное данному.
- члены неравенства можно переносить из одной части неравенства в другую с противоположным знаком.

Определение: решением неравенства

$f(x) > g(x)\ (f(x) < g(x)), x \in X$

называется каждое значение переменной x = a, при котором данное неравенство превращается в истинное числовое неравенство. Решить неравенство – значит, найти множество всех его решений, другими словами: найти множество истинности функции, задающего это неравенство.

Определение: два неравенства называются равносильными, если их множества решений совпадают. [4]

Теорема: неравенства

$$f(x) : g(x) > 0$$

и

$$f(x) \cdot g(x) > 0$$

заданные на множестве X, равносильны. Неравенства 1-й степени называют линейными неравенствами. Любое линейное неравенство в результате преобразований можно представить в следующем виде

$$a \cdot x > b\ (a \cdot x \geq b)$$

или

$$a \cdot x < b\ (a \cdot x \leq b)$$

где a, b – числа.

Список возможных преобразований, которые могут быть использованы для решения неравенств:

- освобождение от дробных членов;
- раскрытие скобок;
- перенос всех членов, содержащих переменную, в одну часть, а остальных — в другую (члены с переменными, как правило, переносят в левую часть неравенства);

- приведение подобных членов;
- деление обеих частей неравенства на коэффициент при переменной. [5]

Когда необходимо найти такие значения x, при которых одновременно верны два неравенства с одной переменной, их записывают совместно, вследствие чего они образуют систему неравенств.

Фигурная скобка в таких случаях показывает, что нужно найти такие значения x, при которых оба неравенства системы обращаются в верные числовые неравенства.

Определение: решением системы неравенств с одной переменной называется значение переменной, при котором верно каждое из неравенств системы. [3]

Обозначения числовых множеств на координатной прямой носят название числовые промежутки.

Функция вида $y = ax^2 + bx + c$, где a, b и c — некоторые числа, причем $a \neq 0$, называется квадратичной.

Графиком квадратичной функции является парабола.

Квадратичную функцию можно записать:

1) в виде многочлена: $y = ax^2 + bx + c$, где $a \neq 0$;

например, $y = 4x^2 - 24x + 20$;

2) в виде разложения на множители (если корни соответствующего квадратного трехчлена существуют): $y = a(x - x_1)(x - x_2)$;

например, $y = 4(x - 1)(x - 5)$;

3) в виде выделенного полного квадрата: $y = a(x - m)^2 + n$;

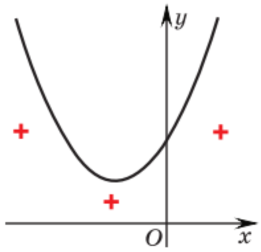
например, $y = 4(x - 3)^2 - 16$.

Свойства квадратичной функции:

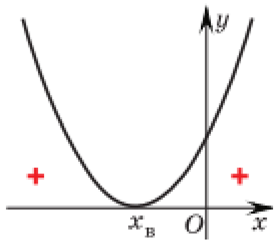
1. Область определения функции — все действительные числа, т. е. D = R.

2. Если a > 0, то E = [$y_в$; +∞); если a < 0, то E = (−∞; $y_в$], где хв и ув — координаты вершины параболы; $y_в = y(x_в)$, $x_в = -b/2a$.
3. Значения аргумента, при которых значения функции $y = ax^2 + bx + c$ равны нулю, являются корнями квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$.
4. Ось симметрии параболы. Осью симметрии параболы является прямая, проходящая через вершину параболы параллельно оси ординат. Уравнение оси симметрии x = − b/2a. Симметричные части графика называются ветвями параболы. Если a > 0, то ветви параболы направлены вверх. Если a < 0, то ветви параболы направлены вниз.

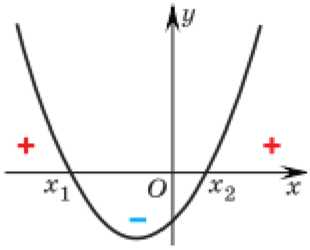
Промежутки, на которых функция принимает только положительные или только отрицательные значения, называются промежутками знакопостоянства функции.



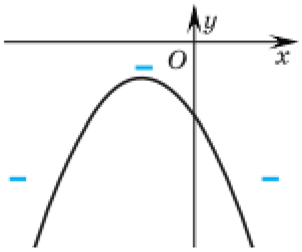
Квадратичная функция принимает только положительные значения при всех значениях аргумента, так как при всех x ∈ R график этой функции расположен выше оси абсцисс, т. е. y > 0 при x ∈ (−∞; +∞).



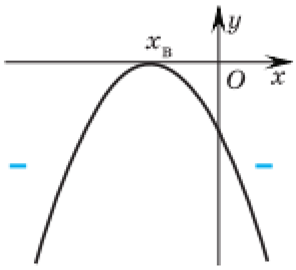
Квадратичная функция принимает только положительные значения при всех значениях аргумента, кроме $x = x_в$, так как при всех $x \neq x_в$ график функции расположен выше оси абсцисс. Значит, y > 0 при x ∈ (−∞; $x_в$) U ($x_в$; +∞).



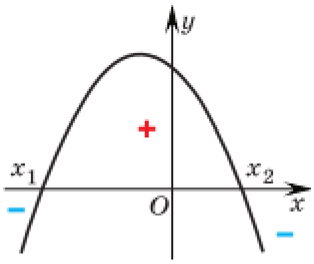
Квадратичная функция принимает положительные значения на промежутках $(-\infty;\ x_1)$ и $(x_2;\ +\infty)$, отрицательные значения — между нулями функции, т. е. на промежутке $(x_1;\ x_2)$.



Квадратичная функция принимает только отрицательные значения при всех значениях аргумента, так как при всех x ∈ R график этой функции расположен ниже оси абсцисс, т. е. $y < 0$ при $x \in (-\infty;\ +\infty)$.



Квадратичная функция принимает только отрицательные значения при всех значениях аргумента, кроме $x = x_в$, так как при всех $x \neq x_в$ график функции расположен ниже оси абсцисс. Значит, $y < 0$ при $x \in (-\infty;\ x_в) \cup (x_в;\ +\infty)$.



Квадратичная функция принимает положительные значения между нулями функции, т. е. на промежутке $(x_1;\ x_2)$. Отрицательные значения эта функция принимает на промежутках $(-\infty;\ x_1)$ и $(x_2;\ +\infty)$.

Теперь для того, чтобы лучше понять теорию необходимо решить несколько примеров.

Пример №1. Решить неравенство и изобразить множество решений на координатной прямой:

$$-8x - 2 > 14.$$

Решение: переносим -2 в правую часть:

$$-8 \cdot x > 14 + 2$$

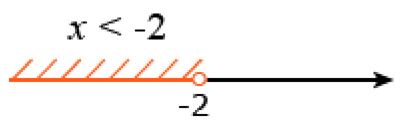
$$-8 \cdot x > 16$$

Делим обе части неравенства на -8:

$$-8 \cdot x : (-8) < 16 : (-8)$$

$$x < -2$$

Отмечаем множество значений x на координатной прямой:



Ответ: (-∞; -2).

Пример №2. Решить неравенство и изобразить множество решений на координатной прямой:

$$6(y + 12) \geqslant 3(y - 4).$$

Решение: сначала раскрываем скобки:

$$6y + 72 \geqslant 3y - 12$$

Переносим 72 в правую часть, а 3y в левую и делаем приведение подобных слагаемых:

$$6y - 3y \geqslant -12 - 72$$

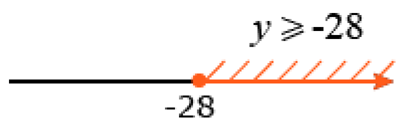
$$3y \geqslant -84$$

Делим обе части неравенства на коэффициент при неизвестном (на 3):

$$(3y) : 3 \geqslant (-84) : 3$$

$$y \geqslant -28$$

Отмечаем множество значений y на координатной прямой:



Ответ: [-28; +∞).

Пример №3. Турист вышел по направлению к железнодорожной станции, расположенной на расстоянии 10 км от него. Если турист увеличит скорость на 2 км/ч, то за 2 часа он пройдет расстояние, большее 10 км. Если он уменьшит скорость на 2 км/ч, то даже за 3 ч не успеет дойти до станции. Какова скорость туриста?

Пусть скорость туриста равна х км/ч. Если турист будет идти со скоростью (х+2) км/ч, то за 2 часа он пройдет 2· (х+2) км. По условию задачи 2· (х+2)>10. Если турист будет идти со скоростью (х-2) км/ч, то за 3 часа он пройдет 3· (х-2) км. По условию задачи

$3 \cdot (x - 2) < 10$

Требуется найти значения х, при которых верно как неравенство

$$2 \cdot (\mathrm{x} + 2) \ > \ 10$$

так и неравенство

$$3 \cdot (\mathrm{x} - 2) \ < \ 10$$

т.е. найти общие решения этих неравенств. В таких случаях говорят, что надо решить систему неравенств.

$$\begin{cases} 2 \ \cdot (\mathrm{x} + 2) > 10; \\ 3 \cdot (\mathrm{x} - 2) < 10. \end{cases}$$

Заменив каждое неравенство системы равносильным ему неравенством, получим

$$\begin{cases} 2\,\mathrm{x} + 4 > 10; \\ 3\mathrm{x} - 6 < 10. \end{cases}$$

$$2\,\mathrm{x} > 6;$$
$$3\mathrm{x} < 16.$$

$$x > 3;$$
$$x < 16/3.$$

Значит, значение x должно удовлетворять условию

$$3 < x < 5\frac{1}{3}$$

Ответ: скорость туриста больше 3 км/ч, но меньше 5 (1/3) км/ч.

Пример №4. Турист отправился на моторной лодке по течению реки и должен вернуться обратно не позже, чем через 5 часов. На какое расстояние может отъехать турист, если скорость течения 3 км/ч, а скорость лодки в стоячей воде 15 км/ч.

По условию:

$$\frac{s}{18} + \frac{s}{12} \le 5$$

$$2s + 3s \le 180$$

$$5s \le 180$$

$$s \le 36$$

Турист не должен отъезжать дальше, чем на 36 км.

Ответ: не более 36 км.

Пример №5. При каких значениях m уравнение $3x^2 + mx + 12 = 0$ имеет два корня?

Уравнение имеет два корня, если дискриминант больше 0. Следовательно,

$$m^2 - 4 * 3 * 12 > 0$$

$$m^2 > 144$$

$$m \in (-\infty; -12) \cup (12; \infty)$$

Ответ:$m \in (-\infty; -12) \cup (12; \infty)$

Пример №6. Найти область определения функции $y = \frac{\sqrt{x^2+2\text{x}-80}}{3a-36}$

Подкоренное выражение не должно быть отрицательным или меньше нуля и знаменатель не должен равняться нулю. Следовательно,

$3a - 36 \neq 0$, $3a \neq 36$, $a \neq 12$

$$x^2 + 2\text{x} - 80 \neq 0$$

$$\sqrt{D} = \sqrt{324} = 18$$

$$x_{1,2} = -10; 8$$

$$x \in (-\infty; -10] \cup [8; \infty)$$

Ответ: $x \in (-\infty; -10] \cup [8; 12) \cup (12; \infty)$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключении, на основе вышеописанного, можно сделать следующие выводы:

- Неравенства обычно имеют бесконечно много решений. Решения представлены графически на числовой прямой, или на координатной плоскости, или с использованием интервальной записи, или и того, и другого.
- Все правила решения линейных неравенств, кроме одного, аналогичны правилам решения линейных уравнений. Если вы разделите или умножите неравенство на отрицательное число, переверните неравенство, чтобы получить эквивалентное неравенство.
- Составные неравенства со словом «или» требуют, чтобы мы решили каждое неравенство и сформировали объединение каждого набора решений. Это значения, которые решают хотя бы одно из заданных неравенств.
- Составные неравенства со словом «и» требуют пересечения множеств решений для каждого неравенства. Это значения, которые решают оба или все заданные неравенства.
- Несколько неравенств с одной переменной образуют систему неравенств, если нужно найти все значения переменной, каждое из которых является частным решением всех заданных неравенств.
- Значение переменной, при котором каждое из неравенств системы обращается в верное числовое неравенство, называют частным решением системы неравенств.
- Множество всех частных решений системы неравенств представляют собой общее решение системы неравенств.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ивин А. А. Логика. Учебник и практикум. М: Юрайт, 2018. 388 с.
2. Жафяров, А. Ж. Математика. 10-11 классы / А.Ж. Жафяров. - М.: Просвещение, 2022. - 208 с.
3. Математика. 10-11 классы. Алгебра. Начала математического анализа. Задачник / М.И. Шабунин и др. - М.: Бином. Лаборатория знаний, 2021. - 478 с.
4. Ивлев Ю. В. Логика. Учебник. М.: Проспект. 2020. 304 с.
5. Математика. 10-11 класс. Базовый уровень для профилей гуманитарной направленности. Программа УМК для общеобразовательных учреждений / В.Ф. Бутузов и др. - М.: Дрофа, 2019. - 401 с.
6. Математика. 10-11 классы. В мире закономерных случайностей. - М.: Учитель, 2019. - 128 с.
7. Власова, А.П. ЕГЭ Математика. 10-11 классы. Практикум для подготовки к ЕГЭ. / А.П. Власова. - М.: ИЗДАТЕЛЬСТВО "АСТ", 2018. - 240 с.