Применение алгоритма Краскала при решении логистической задачи

Попов Никита Евгеньевич

МБОУ «СШ №3 им. Алексея Иосифовича Макаренко», г. Майкоп

Руководитель: В.А. Резиньков, учитель математики

Актуальность темы обусловлена необходимостью активизации самостоятельной работы учащихся старших классов с целью формирования познавательных интересов, мотивации изучения математики, демонстрации практического применения теоретических методов.

Целью работы является исследование метода Краскала решения задачи построения покрывающего (остовного) дерева минимального веса.

Задачи работы Объектом исследования является процесс построения минимального остовного дерева для графа определенного вида, на примере логистической задачи, поиск и изучение теоретических источников по теории графов и сетей.

Введение В настоящее время с развитием различного рода сетей: нейронных, сети Интернет, транспортных, сотовых, электрических и т.п. возникает задача создания таких сетей с минимальными затратами, а также их эффективное использование. Различные компании тратят огромные деньги на развитие логистики и решение подобных задач. А все данные задачи сводятся к одной задаче теории графов - построения минимального остовного дерева. Для примера можно взять карту России, в которой вершинами будут являться населенные пункты, а ребра - это дороги между этими населенными пунктами, получился связный граф. Одна ветка какого-либо метрополитена является тоже графом (деревом).

Основные определения, термины, теоремы

1. ***Граф*** - пара объектов G = (X , Г), где X - конечное множество, а Г – конечное подмножество прямого произведения X*X. При этом X называется множеством вершин, а Г - множеством дуг графа G.

2. Любое конечное множество точек (вершин), некоторые из которых попарно соединены стрелками (в теории графов эти стрелки называются дугами), можно рассматривать как граф.

3. Если во множестве Г все пары упорядочены, то такой граф называют ***ориентированным***.

4. ***Дуга*** - ребро ориентированного графа.

5. Граф называется ***вырожденным***, если у него нет рёбер.

6. Вершина X называется ***инцидентной*** ребру G , если ребро соединяет эту вершину с какой-либо другой вершиной.

7. ***Подграфом*** $G(V_1, E_1)$ графа $G(V, E)$ называется граф с множеством вершин $V_1 \subseteq V$ и множеством ребер (дуг) $E_1 \subseteq E$, - такими, что каждое ребро (дуга) из E_1 инцидентно (инцидентна) только вершинам из V_1**.** Иначе говоря, подграф содержит некоторые вершины исходного графа и некоторые рёбра (только те, оба конца которых входят в подграф).

8. ***Подграфом, порождённым множеством вершин*** *U* называется подграф, множество вершин которого – *U*, содержащий те и только те рёбра, оба конца которых входят в *U*.

9. Подграф называется ***остовным подграфом***, если множество его вершин совпадает с множеством вершин самого графа.

*10.*Вершины называются ***смежными***, если существует ребро, их соединяющее.

*11.*Два ребра G_1 и G_2 называются ***смежными***, если существует вершина, инцидентная одновременно G_1 и G_2.

*12.*Каждый граф можно представить в пространстве множеством точек, соответствующих вершинам, которые соединены линиями, соответствующими ребрам (или дугам - в последнем случае направление обычно указывается стрелочками). Такое представление называется ***укладкой*** графа.

*13.*Доказано, что в 3-мерном пространстве любой граф можно представить в виде укладки таким образом, что линии, соответствующие ребрам (дугам) не будут пересекаться во внутренних точках. Для 2-х мерного пространства это, вообще говоря, неверно. Допускающие представление в виде укладки в 2-мерном пространстве графы называют ***плоскими (планарными)***. Другими словами, ***планарным*** называется граф, который может быть изображен на плоскости так, что его рёбра не будут пересекаться.

*14.**Гранью графа***, изображенного на некоторой поверхности, называется часть поверхности, ограниченная рёбрами графа.

*15.*Данное понятие грани, по существу, совпадает с понятием грани многогранника. В качестве поверхности в этом случае выступает поверхность многогранника. Если многогранник выпуклый, его можно изобразить на плоскости, сохранив все грани. Это можно наглядно представить следующим образом: одну из граней многогранника растягиваем, а сам многогранник «расплющиваем» так, чтобы он весь поместился внутри этой грани. В результате получим плоский граф. Грань, которую мы растягивали «исчезнет», но ей будет соответствовать грань, состоящая из части плоскости, ограничивающей граф.

*16.*Таким образом, можно говорить о вершинах, рёбрах и гранях многогранника, а оперировать соответствующими понятиями для плоского графа.

*17.**Пустым*** называется граф без рёбер. ***Полным*** называется граф, в котором каждые две вершины смежные.

*18.*Конечная последовательность необязательно различных рёбер E_1,E_2,...E_n называется ***маршрутом*** длины n, если существует последовательность V_1, V_2, ... V_n необязательно различных вершин, таких, что $E_i = (V_{i-1},V_i)$.

*19.*Если начальная и конечная вершины маршрута совпадают, то маршрут ***замкнутый***.

*20.*Маршрут, в котором все рёбра попарно различны, называется ***цепью***.

*21.*Замкнутый маршрут, все рёбра которого различны, называется ***циклом***. Если все вершины цепи или цикла различны, то такая цепь или цикл называются ***простыми***.

*22.*Маршрут, в котором все вершины попарно различны, называется ***простой цепью***.

*23.*Цикл, в котором все вершины, кроме первой и последней, попарно различны, называется ***простым циклом***.

24.Цикломатическое число γ показывает, сколько ребер нужно удалить из графа, чтобы в нем не осталось циклов $\gamma = m - n + 1$, где m - количество ребер, n - количество вершин

25.Остовное дерево — ациклический связный подграф данного связного неориентированного графа, в который входят все его вершины, содержащий ровно $E=V-1$ ребер.

26.Минимальное остовное дерево - это остовное дерево этого графа, имеющее минимальный возможный вес, где под весом дерева понимается сумма весов входящих в него рёбер.

Количество всех остовных деревьев можно найти, применив теорему Трента

Теорема Трента

Число остовных деревьев связного мультиграфа есть любой главный минор квадратной матрицы, по главной диагонали которой расположены степени вершин, а элементы a_{ij} равны взятому со знаком минус числу ребер, связывающих вершины V_i и V_j.. Однако, поиск всех остовных деревьев минимального веса вручную, используя теорему Трента процесс трудоёмкий. Рассмотрим **алгоритм Краскала**.

Алгоритм Краскала — эффективный алгоритм построения минимального остовного дерева связного неориентированного графа. Алгоритм впервые описан Джозефом Краскалом в 1956 году. Пусть имеется некоторый граф G и каждому его ребру $(x;y)$ поставим в соответствие число $m(x;y)$, которое назовем его весом. Вес дерева определяется как сумма весов его ребер. Для графа G необходимо построить покрывающее дерево (т.е.

дерево, содержащее все вершины графа) минимального веса. Просматриваются ребра графа в порядке возрастания их веса, если ребро включено в покрывающее дерево, то оно окрашивается в синий цвет, в противном случае в красный. Рёбра, включенные в дерево, образуют граф, состоящий из нескольких компонент, если концевые вершины, просматриваемого ребра принадлежат одной и той же компоненте, то ребро образует цикл с ребрами, ранее включенными в дерево. Такое ребро не включается в дерево, в противном случае ребро включается в дерево. Вершины одной связной компоненты образуют букет.

1. Берут ребро минимального веса, которое не является петлёй. Окрашивают его в синий цвет, а его концевые вершины включают в первый букет.
2. Выбирают следующее неокрашенное ребро.

   Если его концевые вершины принадлежат одному и тому же букету, то его окрашивают в красный цвет.

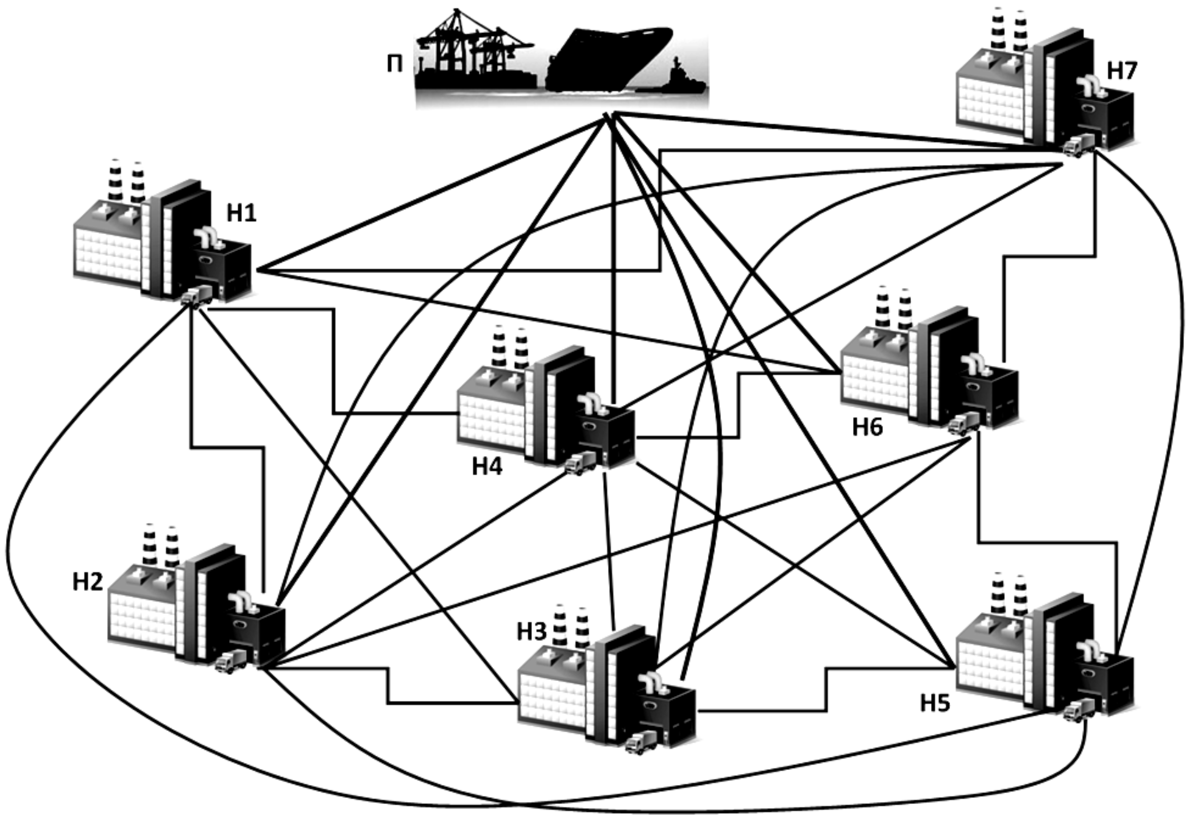
   Если ни одна из его концевых вершин не принадлежит ни одному из букетов, то их включают в новый букет и окрашивают ребро в синий цвет. Если концевые вершины принадлежат разным букетам, то их объединяют в один букет и окрашивают ребро в синий цвет

   Если один конец ребра принадлежит некоторому букету, а второй не входит ни в один букет, то нужно включить второй конец в тот же букет и окрасить ребро в синий цвет
3. Процедура считается завершенной, если все ребра графа вошли в один букет. В противном случае переходим к шагу 2.
4. Число шагов конечно, т.к. оно не превышает числа ребер графа. Если синие ребра не образовали покрывающего дерева, то у исходного графа их нет.

Задача. Необходимо построить систему нефтепроводов, которые должны соединять семь нефтеочистительных заводов (Н1, Н2, Н3, Н4, Н5, Н6, Н7), принадлежащих компании «Нефтедобыча», с портом (П), куда поступает импортируемая сырая нефть. Стоимость прокладки нефтепровода между любыми двумя пунктами составляет 5000 $ в расчете на 1 км. Расстояния между всеми парами вершин задаются в следующей таблице [8,40с]

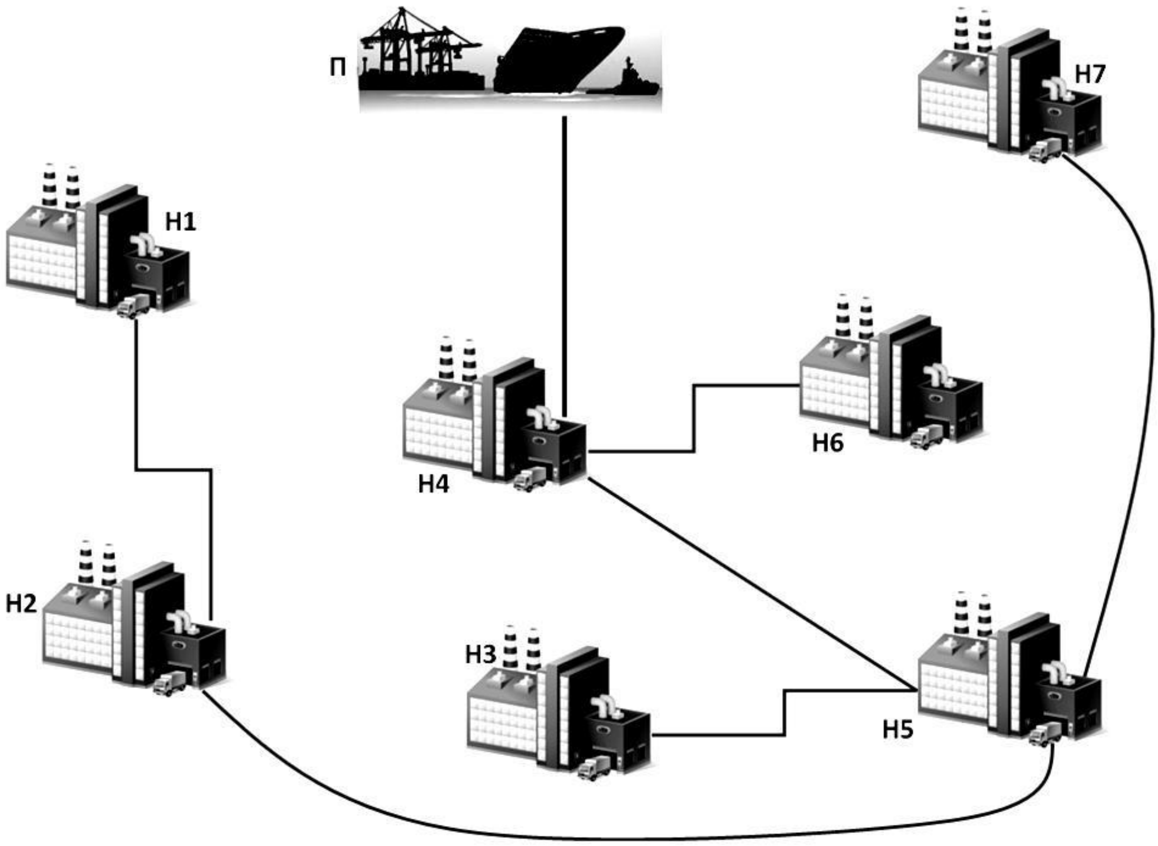
	П	Н1	Н2	Н3	Н4	Н5	Н6	Н7
П	**-**	***5***	***6***	***8***	***2***	***6***	***9***	***10***
Н1		-	***4***	***10***	***5***	***8***	***6***	***10***
Н2			-	***11***	***8***	***4***	***9***	***10***
Н3				-	***10***	***3***	***6***	***7***
Н4					-	***2***	***5***	***9***
Н5						-	***10***	***5***
Н6							-	***8***
Н7								-

Топология заводов



Решение:

Ребро	Цвет	Букет 1	Букет 2	Вес
(П;Н4)	**синий**	**П;Н4**		**2**
(Н4;Н5)	**синий**	**П,Н4,Н5**		**2**
(Н3;Н5)	**синий**	**П,Н3,Н4,Н5**		**3**
(Н1;Н2)	**синий**		**Н1,Н2**	**4**
(Н2;Н5)	**синий**	**П,Н1,Н2,Н3,Н4,Н5**		**4**
(П;Н1)	**красный**			**5**
(Н1;Н4)	**красный**			**5**
(Н4;Н6)	**синий**	**П,Н1,Н2,Н3,Н4,Н5,Н6**		**5**
(Н5;Н7)	**синий**	**П,Н1,Н2,Н3,Н4,Н5,Н6,Н7**		**5**



В конечном итоге получим топологию, соответствующую поставленной задаче.

Минимальная стоимость $\sum = (2*2+3+4*2+5*2)*5000=125000\$$

Список литературы

1. *Дистель Р.* Теория графов Пер. с англ. - Новосибирск: Издательство института математики, 2002. - 336с.
2. *Басакер Р., Саати Т.* Конечные графы и сети. М.: Наука, 1974. 368с.
3. *Белов В. В., Воробьев Е. М., Шаталов В. Е.* Теория графов. — М.: Высш. школа, 1976. — 392с.
4. *Берж К.* Теория графов и ее приложения. М.: ИЛ, 1962. 320с.
5. *Емеличев В. А., Мельников О. И., Сарванов В. И., Тышкевич Р. И.* Лекции по теории графов. М.: Наука, 1990. 384с. (Изд.2, испр. М.: УРСС, 2009. 392 с.)
6. *Зыков А. А.* Основы теории графов. — М.: «Вузовская книга», 2004. — С. 664. (М.: Наука, 1987. 383с.)
7. *Кристофидес Н.*Теория графов. Алгоритмический подход. М.: Мир, 1978. 429с.
8. *Майника Э.* Алгоритмы оптимизации на сетях и графах, изд. - Мир, 1981, - 326с.
9. *Мельников О. И.* Занимательные задачи по теории графов: Учеб.-метод. пособие /– Изд - е 2-е, стереотип. – Мн.: «ТетраСистемс», 2001
10. *Оре О.* Теория графов. — 2-е изд. — М.: Наука, 1980. — 336с.