Научно-исследовательская работа

Математика

ГЕОМЕТРИЯ ПЧЕЛИНЫХ СОТ

Выполнила:

Погорелова Анна Витальевна,

учащаяся 8А класса

МОУ «Средняя школа № 56 Кировского района Волгограда», Россия

Руководитель:

Буханцева Анна Александровна,

учитель математики

МОУ «Средняя школа № 56 Кировского района Волгограда», Россия

Введение

В материальном мире, окружающем человека, присутствует много вещей, имеющих формы геометрических фигур: точка, линия, отрезок, луч, треугольник, квадрат, прямоугольник, круг и т.д. Треугольник – знак аварийной остановки, дорожный знак, фронтон крыши и т.п., квадрат и прямоугольник – самые распространенные геометрические фигуры, окружающие человека, круг или окружность – форма тарелки, гимнастический обруч и т.п. А что имеет форму шестиугольника? Я задумалась… Первое, что пришло в голову, это строение пчелиных сот в форме правильного шестиугольника [1]. Я решила изучить эту фигуру как можно подробнее, понять, почему пчёлы строят соты в форме правильного шестиугольника. Смоделировать жилище человека по принципу пчелиных сот.

Цель работы: математическими методами исследовать свойства правильного шестиугольника, найти применение этих свойств в жизни человека.

Гипотеза исследования: если шестигранная пчелиная ячейка - идеальная геометрическая форма для максимального использования единиц площади и экономии материалов при постройке стенок сот, то почему человек не строит жилища шестиугольной формы?

Задачи исследования:

- ✓ Исследовать свойства правильного шестиугольника.
- ✓ Найти практическое применение данных свойств в жизни человека.
- ✓ Построить модели различных вариантов планирования жилищ для человека.

Задача изучения и использование свойств правильного шестиугольника является прикладной, решение которой, позволяет реализовать практическую (прикладную) направленность математики, что *очень актуально в современное время.*

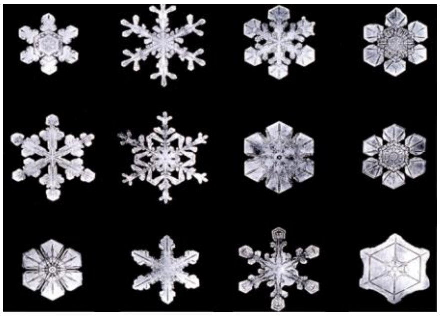
---

[1] Шестиугольник называется правильным, если у него все стороны равны и все углы равны.

Правильный шестиугольник – творение природы.

Если быть достаточно наблюдательным, то в живой природе легко обнаружить строгую геометрию. Особую красоту создают гексагоны [2] – правильные шестиугольники. Приведу примеры несколько интересных фактов, где встречаются правильные шестиугольники.

Пчелиные соты показывают разбиение плоскости на правильные шестиугольники. Шестиугольная форма больше остальных позволяет сэкономить на стенках, то есть на соты с такими ячейками уйдёт меньше воска.



Все мы в детстве любили рассматривать **снежинки** на шарфе и варежках. По собственным наблюдениям и по рассказам взрослых, мы считаем, что у снежинок 8 сторон, но существуют шестисторонние снежинки, которые, как правило, при соединении лучей образуют правильный шестиугольник.

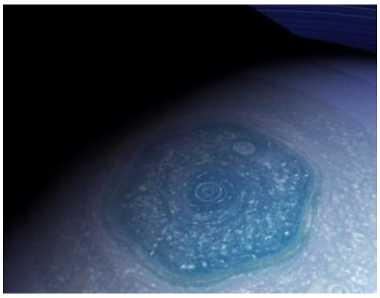
Дорога гигантов — наиболее популярная достопримечательность в Северной Ирландии. Это памятник природы из примерно 40 000 соединённых между собой базальтовых (реже андезитовых) шестигранных колонн, образовавшихся в результате древнего извержения вулкана. Их возраст — порядка 50-60 млн. лет. Учёные не могут понять, почему же природа создала столько необычных камней в виде правильных шестиугольников в одном месте? Выглядит это, действительно, захватывающе!

[2] Гексагон — правильный шестиугольник — символ изобилия, красоты, гармонии, свободы, брака, любви, милости, удовольствия, мира, взаимности и симметрии. Он обозначал также образ человека (две руки, две ноги, голова и туловище). Образовалось от греческого слова hex, что в переводе означает «шесть». Отсюда и наше привычное название – правильный шестиугольник.

Даже **панцирь черепахи** имеет рисунок, состоящий из правильных шестиугольников.

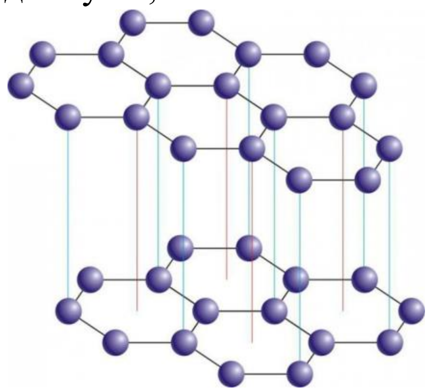
Вымершие уже кораллы под названием Cyathophyllum hexagonum даже имя своё получили благодаря 6-угольной форме. И такая группа водорослей, как диатомовые тоже обладают формой 6-угольника.

Глаз стрекозы включает порядка 30 тысяч 6-угольников, причем только три из них встречаются в любой данной точке пересечения (или вершине). У стрекоз два больших сложных глаза с тысячами шестиугольных линз. По сути, этот оптический аппарат, считающийся одним из лучших среди животных, состоит из гексагонов.



Наша природа настолько необычна и разнообразна, что даже Сатурну достался свой личный правильный шестиугольник.

Длина его составляет примерно 14,5 тыс. км, что больше диаметра Земли. А каждая сторона **Гексагона Сатурна** (так его астрономы и называют) достигает в длину 13,8 тыс. км.



Некоторые сложные молекулы углерода (например, графит) имеют гексональную форму.

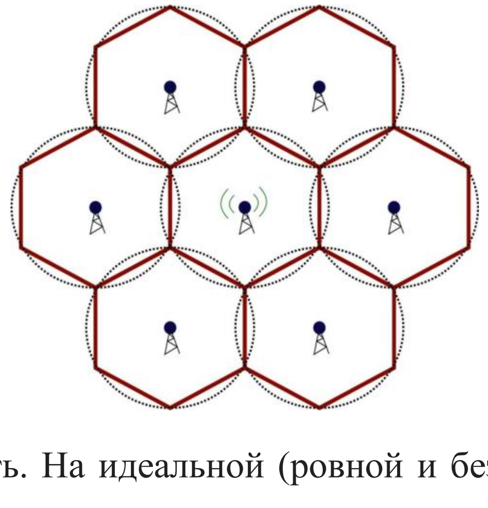
Пузыри на воде. Стоит подуть на пузырьки воздуха на водной поверхности, согнав их близко друг к другу, как они приобретают шестиугольную форму. И чем плотнее пузыри сгруппированы, тем явнее становится их шестиугольность. Получившийся рисунок обязан своим появлением только физическим закономерностям. Поверхность жидкости под воздействием поверхностного натяжения сжимается так, чтобы занимать как можно меньшую площадь.

Почему же шестиугольники так часто встречаются в природе? Возможно, это эффективный способ сохранения массы или энергии, или просто способ расположить атомы таким образом, чтобы они были стабильны. Это может быть просто что-то, обусловленное геометрией.

Правильный шестиугольник на службе у человека

Гексагональные шахматы Глинского — разновидность игры в шахматы для двух игроков, на шестиугольной доске, имеющей форму правильного шестиугольника, содержится 91 шестиугольное поле трёх цветов.

Сечение гайки имеет вид правильного шестиугольника. Шестигранные гайки и болты с шестигранной головкой являются наиболее распространенным типом крепежа, они используются повсеместно. Причина, по которой они так популярны, заключается в том, что шестиугольная форма головки очень универсальна, ее можно захватывать инструментами со всех сторон и даже вручную, если это необходимо.



Сотовая связь, сеть подвижной связи — один из видов мобильной радиосвязи, в основе которого лежит сотовая сеть. Ключевая особенность заключается в том, что общая зона покрытия делится на ячейки (соты), определяющиеся зонами покрытия отдельных базовых станций (БС). Соты частично перекрываются и вместе образуют сеть. На идеальной (ровной и без застройки) поверхности зона покрытия одной БС представляет собой круг, поэтому составленная из них сеть имеет вид шестиугольных ячеек (сот).

Свойства правильного шестиугольника

Рассмотрим подробно свойства правильного шестиугольника (рис. 1):

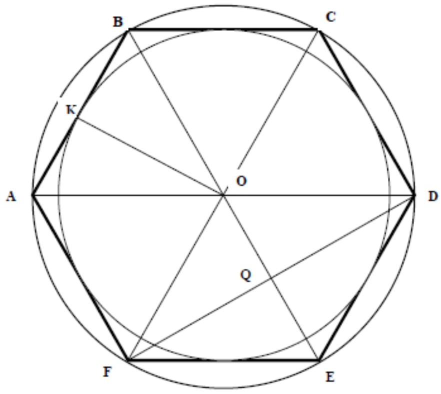


Рис. 1. Свойства правильного шестиугольника.

1) Сумма всех углов равно 720^0, а каждый из них равен 120^0:

$$\sum = (n-2)\cdot 180^0 = (6-2)\cdot 180^0 = 720^0.$$

2) Сторона правильного шестиугольника равна радиусу описанной около него окружности:

AB = AO = R (где R – радиус описанной окружности).

3) Большая диагональ правильного шестиугольника является диаметром описанной вокруг него окружности и равна двум его сторонам:

$AD = 2R = d$ *(где d- диаметр описанной окружности).*

4) Меньшая диагональ правильного шестиугольника перпендикулярна его стороне, и в $\sqrt{3}$ раз больше его стороны:

$DF \perp AF, \quad DF = \sqrt{3}\, AF = \sqrt{3}R.$

5) Треугольник, образованный стороной шестиугольника, его большей и меньшей диагоналями, прямоугольный, а его острые углы равны 30° и 60°, т.е. в ΔADF ∠FDA=30^0, ∠FAD=60^0.

Поэтому большая диагональ в два раза больше стороны правильного шестиугольника (свойство прямоугольного треугольника).

6) Отношение большей диагонали к меньшей:

$$\frac{AD}{FD} = \frac{2R}{R\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

7) Меньшая диагональ правильного шестиугольника или перпендикулярна большей, или образует с ней угол в 30^0:

$\angle FDA = 30^0$ или $\angle EQD = 90^0$.

8) диагонали пересекаются в одной точке и делят его на 6 равносторонних треугольников, у которых высота равна радиусу вписанной в правильный шестиугольник окружности:

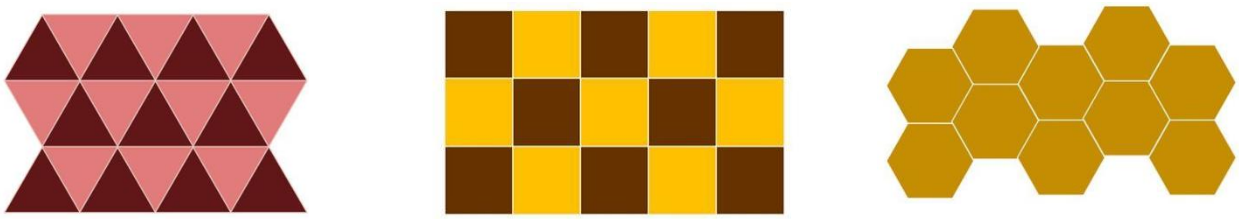
ОК – высота равностороннего треугольника АОВ, ОК = r (где r – радиус вписанной окружности).

9) Площадь правильного шестиугольника можно находить как сумму площадей шести равных правильных треугольников, или как сумму площадей двух равных равнобедренных трапеций, или как сумму трёх равных ромбов.

10) Правильный шестиугольник заполняет плоскость без пробелов и наложений.

Я предположила, что именно это свойство правильного шестиугольника легло в основу построения пчелиных сот. Поэтому стоит разобраться в этом подробно.

Несложно замостить плоскость паркетом из правильных треугольников, квадратов или шестиугольников (под *замощением* следует понимать такую укладку, при которой вершины каждой фигуры прикладываются только к вершинам соседних фигур и не возникает ситуации, когда вершина приложилась к стороне). Примеры таких замощений приведены на рис. 2.



a **b** **c**

Рис. 2. Замощение плоскости: ***a*** — равносторонними треугольниками, ***b***— квадратами, ***c*** — правильными шестиугольниками.

Оказывается, никакими другими правильными n-угольниками покрыть плоскость без пробелов и наложений не получится. Это просто объясняется.

Как известно, сумма внутренних углов любого n-угольника равна $(n-2)\cdot 180°$. Так как все углы правильного n-угольника одинаковые, то градусная мера каждого угла равна $\frac{(n-2)\cdot 180^0}{n}$. Если плоскость можно замостить такими фигурами, то в каждой вершине сходится m многоугольников. Сумма углов при этой вершине равна 360°, поэтому $m\cdot\frac{(n-2)\cdot 180^0}{n}=360^0$. Сделав несколько преобразований:

$$\frac{n-2}{n}=\frac{2}{m}$$

$$1-\frac{2}{n}=\frac{2}{m}$$

$$1=\frac{2}{m}+\frac{2}{n}$$

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{m}+\frac{1}{n}$$

Это уравнение с двумя неизвестными имеет бесконечно много решений, но нас интересуют только такие пары, где m и n- натуральные числа. Таких пар только 3:

если $m=6$, то $n=3$,

если $m=4$, то $n=4$,

если $m=3$, то $n=6$.

Этим парам чисел как раз и соответствуют приведенные на рис. 2 замощения.

Итак, мы выяснили, что заполнить плоскость без пробелов можно, используя или правильные треугольники, или квадраты, или правильные шестиугольники.

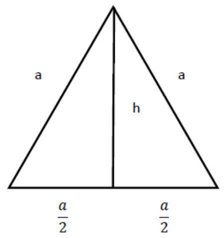
При замощении плоскости правильными треугольниками, в каждой точке сходятся шесть треугольников, квадратами - четыре квадрата, шестиугольниками – всего три шестиугольника. Поэтому можно предположить, что «мудрые пчёлы» экономят воск и время для построения сотов в форме правильных шестиугольников.

Проверим это предположение еще одним расчетом: сравним периметры равновеликих фигур.

11) Развивая «пчелиную» тему выясним, какая из трех равновеликих друг другу фигур [3] - правильный треугольник, квадрат или правильный шестиугольник имеет меньший периметр?

Пусть S- площадь каждой исследуемой фигуры, a – стороны правильного многоугольника (треугольника, квадрата и шестиугольника), длины которых нужно вычислить для нахождения периметров соответствующих фигур.

а) Периметр правильного треугольника.



$P_3 = 3a$.

$S = \frac{a \cdot h}{2}$, => $a = \frac{2S}{h}$.

Высоту найдем по теореме Пифагора:

$$h = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{4a^2 - a^2}{4}} = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

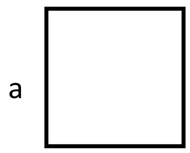
Вычислим площадь $S = \frac{a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Зная площадь, выразим сторону треугольника: $a = \sqrt{\frac{4S}{\sqrt{3}}} = 2\sqrt{\frac{S}{\sqrt{3}}}$.

$$P_3 = 3 \cdot 2\sqrt{\frac{S}{\sqrt{3}}} = 6\sqrt{\frac{S}{\sqrt{3}}} .$$

б) Периметр квадрата.

Аналогично вычислим периметр P_4 квадрата со стороной a:

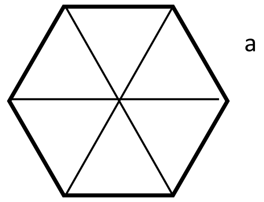


$S = a^2$, => $a = \sqrt{S}$

$P_4 = 4\sqrt{S}$.

в) Периметр правильного шестиугольника.

Вычислим площадь правильного шестиугольника, зная, что шестиугольник состоит из шести правильных треугольников. Поэтому:



$S = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2 \cdot 3\sqrt{3}}{2}$.

$a^2 = \frac{2S}{3\sqrt{3}}$, => $a = \sqrt{\frac{2S}{3\sqrt{3}}}$.

[3] Фигуры называются равновеликими, если они имеют равные площади.

$$P_6 = 6\sqrt{\frac{2S}{3\sqrt{3}}}$$

В заключении найдем отношение полученных периметров:

$$P_3 \colon P_4 \colon P_6 = 6\sqrt{\frac{S}{\sqrt{3}}} : 4\sqrt{S} : \ 6\sqrt{\frac{2S}{3\sqrt{3}}}$$

Разделив каждую часть отношения на $\sqrt{S}$, получим:

$$P_3 \colon P_4 \colon P_6 = \frac{6}{\sqrt[4]{3}} : 4 : \ 6\sqrt{\frac{2}{3\sqrt{3}}}$$

Разделив каждую часть отношения на $\frac{6}{\sqrt[4]{3}}$, получим:

$$P_3 \colon P_4 \colon P_6 = 1 : \frac{2}{3}\sqrt[4]{3} : \ \sqrt{\frac{2}{3}}$$

Таким образом, получим следующее отношение периметров:

$$P_3 \colon P_4 \colon P_6 \approx 1 \colon 0{,}8774 \colon 0{,}8165.$$

Анализ результата вычислений позволяет сделать вывод: *из трех правильных многоугольников с одинаковой площадью наименьший периметр имеет правильный шестиугольник.* Вот почему, «мудрые» пчёлы для построения сот выбрали форму правильного шестиугольника.

Жизнь человека в гексагоне

Давайте позаимствуем у пчел их рациональное использование соотношения периметров равновеликих многоугольников.

Хотя привычка человека строить свои жилища квадратной или прямоугольной формы выработана веками. Но ведь существуют же примеры жилищ человека нетрадиционной формы, например, у индейцев, жителей крайнего севера или у кочующих племен Азии. Для человека с креативным мышлением, наверняка, подошел бы дом или квартира в форме гексагона.

Представить себе дом в форме правильного шестиугольника не сложно. Трудно вообразить себе, как расположить в комнатах непривычной формы мебель и другие предметы быта человека.

Пример 1. Двухэтажный дом для одной семьи.

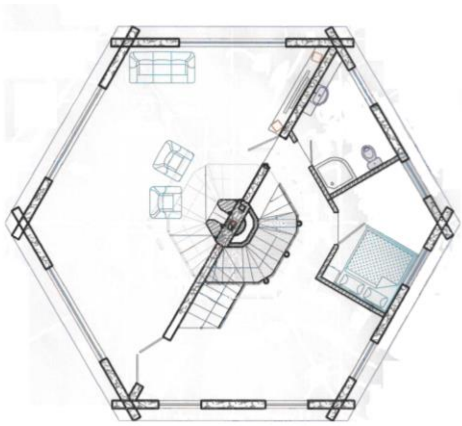


Рис. 3. План 1 этажа дома

Планировка комнат и расстановка мебели в таком доме очень необычна. Вполне подойдет для семьи с двумя детьми.

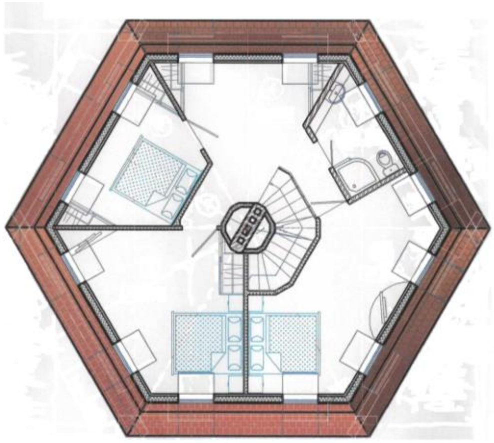


Рис. 4. План 2 этажа дома

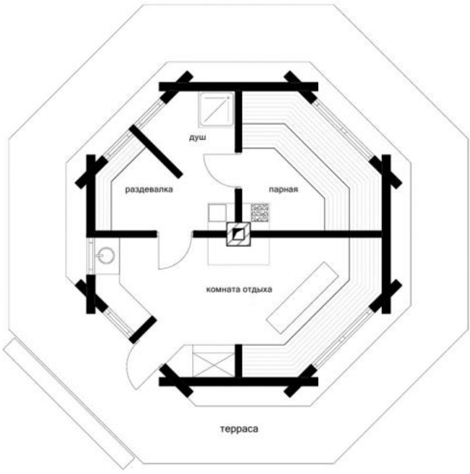
Пример 2. Дачный домик.

Небольшой уютный дачный домик для комфортного отдыха семьи в летний период.

Рис.5. План и схема размещения мебели дачного домика

Пример 3. Баня.

Деревянная баня – мечта любого человека. Такая постройка станет украшением любого домовладения.



Пример 4. Одноэтажный дом для большой семьи.

Моя большая семья с удовольствием разместилась бы в доме с такой планировкой.

Пример 5. Беседка с зоной для барбекю.

Такая уютная беседка станет украшением любой семьи. Когда за большим столом будет собираться вся семья, места хватит всем.

Заключение

Человек на протяжении тысячелетий учится у природы ее мудрости. Чтобы взлететь - наблюдает за птицами, чтобы погрузится на дно океана – подглядывает за рыбами. Наверно, пришло время, чтобы посмотреть, как строят свои соты пчёлы? И у них поучиться.

С точки зрения рациональности использования формы правильного шестиугольника для строительства различных сооружений для жилья и быта человека, возможно, со мной поспорят матёрые градостроители. Но в одном я совершенно уверена, что дома и другие сооружения, выполненные в форме гексагона, украсят наши жилые кварталы и планету в целом. Только представьте себе, как будет выглядеть наша планета с высоты птичьего полёта, если на ней будут построены дома правильной шестиугольной формы!

Я бы хотела жить в таком доме. А вы?

Список используемой литературы

1) *Азевич А.И.,* Геометрические вариации на «пчелиную» тему// Математика в школе.- М: Наука, 1998. №21 с. 32-38.

2) *Аксенова М.Д.*, Энциклопедия для детей. Т.Н. Математика. -М. :Аванта+, 2001.-688с.

3) *Еленьский Щ.И.,* По следам Пифагора. М.; Детгиз, 1961,485 с.

4) *Выгодский М. Я.*, Справочник по элементарной математике. М: АСТ Астрель, 2006.

5) *Колмогоров А. Н.*, Паркеты из правильных многоугольников.// Квант.- 1986.№3.

7) *Погорелов А.В.,* Геометрия. Учеб. для 7-11 кл. общеобразоват. учреждений. - 5-еизд. -М.: Просвещение. 1995. -383 с.:ил.

8) *Штейнгауз Г.* Математический калейлоскоп. М: Наука, 1998.

9) https://ru.wikipedia.org/wiki/Правильный_шестиугольник

10) https://www.kramola.info/blogs/neobyknovennoe/otkuda-berutsya-shestiugolnye-struktury-v-prirode

11) https://hexagontactical.ru/interesnye-fakty/geksagon-vokrug-nas/