Научно-исследовательская работа

Физика

ЗАДАЧА ТРЁХ ТЕЛ

Выполнила: ***Урбанович Светлана Евгеньевна***,

учащаяся 11 «Ф» класса

МБОУ «Лицей «ФТШ», Россия, г. Обнинска

Руководитель:

Дорошенко Александр Юрьевич,

педагог дополнительного образования МБОУ ДО ЦРТДиЮ, канд. физ-мат. наук, Россия, г. Обнинск

ОГЛАВЛЕНИЕ.

ВВЕДЕНИЕ.

О продвинутости физической теории можно судить
по тому, с каким количеством взаимодействующих тел
она не в состоянии разобраться.
(*Старая шутка.*)

Закон всемирного тяготения Ньютона сталкивается с проблемами уже на трёх телах. Общая Теория Относительности с трудом справляется с двумя. Как мне кажется, квантовая теория и для одного тела непомерно сложна. Квантовая теория поля попадает в беду даже там, где тел нет вообще — в вакууме. Именно из-за того, что такое количество величайших теорий не могут похвастаться точным аналитическим решением задачи трёх тел, она меня и заинтересовала.

Над задачей гравитационного взаимодействия трёх тел, математический мир бился не одну сотню лет. И до сих пор бьется. Правда, сегодня мы знаем, что динамика трёх тел хаотична — настолько нерегулярна, что несёт в себе элементы случайности.

Проводя исследование в этой теме, меня вдохновляли такие идеи:

1. С одной стороны, появление случайности в задаче трёх тел является опровержением теории детерминизма. Но с другой стороны, всем известные траектории, такие как «восьмёрка» Кристофера Мура, являются случаями контролируемого хаоса.
2. А что, если различные флуктуации имеют одну природу со случайностью в задаче трёх тел.

Они будоражат воображение и теперь движут мною в исследовании. Задумываясь об этом, становится ясно, что великое множество явлений во Вселенной остаются для нас загадкой.

<u>*Целью*</u> моей работы является исследование трёх задач на движение тел, взаимодействующих по закону всемирного тяготения в двумерном

пространстве. Но в будущем я буду исследовать эти задачи и в трёхмерном пространстве.

Исследование велось с помощью закона всемирного тяготения и второго закона ньютона, т.к. преследовалась цель наиболее точно показать физический смысл этой проблемы.

Теперь немного об *актуальности* этой задачи.

Задача трёх тел является классической задачей небесной механики. В 1687 году её сформулировал Ньютон. Она привлекала внимание многих выдающихся физиков и математиков, таких как Эйлер, Лагранж, Пуанкаре, Зундман, Арнольд, Мур, Ченсинер, Монтгомери. И многие другие учёные посвятили годы своих исследований этой задаче. Привлекательность этой задачи заключается в том, что ее просто сформулировать, но крайне трудно решить. Важность задачи трёх тел заключается в том, что она позволяет описывать динамическую эволюцию многих астрономических объектов (таких как Солнце-Земля-Луна, космические аппараты, тройные астероиды, планетные системы, кратные звезды и др.) с хорошей точностью. Во многих случаях если пренебречь размерами тел, их строением и формами, заменить эти тела на соответствующие точечные массы, то это сильно упростит описание тройной динамической системы, сводя её изучение к задаче трех тел. А значит, это может использоваться для запусков космических аппаратов. Исследуя задачу трех тел, мы можем разработать математическую модель для заданных условий, с её помощью подобрать нужную траекторию и соответственно скорость, с которой этот аппарат следует запустить. Таким образом, освоение космического пространства будет происходить быстрее.

Также задача 3-х тел является отличной моделью для изучения всех стохастических процессов. Например для исследования движения молекул пара.

Исследования и поиск периодических орбит в задаче трёх тел регулярно проводятся со времен Пуанкаре. В последние десятилетия интерес к этой задаче значительно вырос с непрерывным прогрессом в вычислительной технике, что позволяет разрабатывать и использовать новые методы поиска и изучения решений даже ученикам старших классов. [4]

ГЛАВА I. ЗАДАЧА ДВУХ ТЕЛ.

1.1.История задачи 2-х тел.

Начнем с двух тел, взаимодействующих посредством сил гравитации. И. Кеплер (1619 г.) сформулировал три закона движения планет Солнечной системы, проанализировав многочисленные наблюдения, показал, что траектория движения планеты — эллипс.

И. Ньютон (1687 г.) доказал, что три закона Кеплера эквивалентны единственному закону тяготения: два точечных тела притягиваются друг к другу с силой пропорциональной их массам и обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними:

$$F = G\frac{m_1 m_2}{R^2}$$

F — сила всемирного тяготения

G — гравитационная постоянная

m_1 — масса 1-го тела m_2 — масса 2-го тела

R — расстояние между телом 1 и 2

С учетом понятия вектора запишем:

$$\vec{F}_{21} = \frac{m_1 m_2 G}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \qquad \vec{F}_{12} = -\frac{m_1 m_2 G}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$$, где

r_1 — радиус-вектор 1-го тела r_2-радиус-вектор 2-го тела

F_{12} — сила, действующая со стороны 2-го тела на 1-ое

F_{21} — сила, действующая со стороны 1-го тела на 2-ое

Закон Ньютона обладал преимуществом: он был применим к любой системе тел, сколько бы их не было. Но за это приходилось платить: закон описывал орбиты не как геометрические формы, а как решения системы дифференциальных уравнений второго порядка (в уравнения входит вторая производная от координаты).

a_1 — ускорение, которое приобретает 1-ое тело

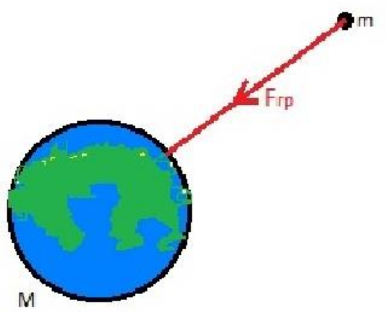
a_2 — ускорение, которое приобретает 2-ое тело

$$\begin{cases} m_1\vec{a}_1 = -\dfrac{m_1 m_2 G}{\left|(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)\right|^3}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2); \\ m_2\vec{a}_2 = -\dfrac{m_1 m_2 G}{\left|(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)\right|^3}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1). \end{cases}$$

Решение приведенной выше системы уравнений существует в аналитическом виде, то есть в виде формулы. Во всех учебниках это *задача Кеплера*. [2] [3]

1.2.Решение задачи 2-х тел.

Я решила с помощью компьютерного моделирования в программе Mathcad проанализировать задачу двух тел на примере Земли (массивного тела) и пылинки (тела незначительной массы). [1]



Тело находится на расстоянии r от Земли. Запишем для него уравнение 2-го закона Ньютона:

$m\vec{a} = \dfrac{-mMG\vec{r}}{r^3}$, где $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt}$, r — расстояние между пылинкой и Землей, M — масса Земли, m — масса пылинки.

Сократим на m: $\vec{a} = \dfrac{-MG\vec{r}}{r^3}$

Приравняем значения *a*, спроецируем вектор ускорения на оси Ox и Oy:

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{-MGx}{r^3} = \frac{-MGx}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{dv_y}{dt} = \frac{-MGy}{r^3} = \frac{-MGy}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

А так как я исследую модель в двумерном пространстве, модуль вектора можно вычислить по теореме Пифагора.

1.3. Процедура обезразмеривания.

Для получения более изящных формул и наиболее корректной работы программы проведем процедуру обезразмеривания:

R — радиус Земли

$\vec{p} = \frac{\vec{r}}{R}$ — безразмерная величина расстояния

$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ — скорость тела

$V1 = \sqrt{gR}$ — первая космическая скорость

$\vec{u} = \frac{\vec{v}}{V1}$ — безразмерная величина скорости тела

Подставим сюда значение *v* как производной координаты по времени, домножим и разделим на *R*, заменим $\frac{\vec{r}}{R}$ на $\vec{p}$:

$$\vec{u} = \frac{1}{V1}\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{R}{V1}\frac{d\vec{r}}{dtR} = \frac{R}{V1}\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{R}{\sqrt{gR}}\frac{d\vec{p}}{dt}$$

G — гравитационная постоянная

M — масса Земли

m — масса тела

$g = \frac{MG}{R^2}$ — ускорение свободного падения

Домножим и разделим $\vec{a} = \frac{-MG\vec{r}}{r^3}$ на R^3:

$$\vec{a} = \frac{-MG\vec{r}}{r^3} = \frac{-MG}{R^2}\frac{R^2}{r^3}\vec{r} = \frac{-MG}{R^2}\frac{R^3}{r^3}\frac{\vec{r}}{R}$$

$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ — домножим и разделим это уравнение на *V1;* вынесем *V1* за знак производной

$$\vec{a} = V1\frac{d}{dt}(\frac{\vec{v}}{V1})$$

Заменим $\frac{\vec{v}}{V1}$ на $\vec{u}$ и $V1$ на $\sqrt{gR}$:

$\vec{a} = \sqrt{gR}(\frac{d\vec{u}}{dt})$ Подставим конечное значение *u:*

$\vec{a} = \sqrt{gR}\frac{R}{\sqrt{gR}}\frac{d}{dt}(\frac{d\vec{p}}{dt}) = -g\frac{\vec{p}}{p^3}$ Разделим на *g:*

$$\frac{R}{g}\frac{d}{dt}(\frac{d\vec{p}}{dt}) = \frac{-\vec{p}}{p^3}$$

Время измеряется в секундах (в СИ) => можем записать его как:

$t = \tau\sqrt{\frac{R}{g}}$ => $\tau = t\sqrt{\frac{g}{R}}$ - безразмерная величина времени. Подставим значение *t* после обезразмеривания в формулы:

$$\vec{a}_{безразмерюе} = \frac{R}{g}\frac{d}{d(\sqrt{\frac{R}{g}}\tau)}(\frac{d}{d(\sqrt{\frac{R}{g}}\tau)}(\frac{-\vec{p}}{p^3})) = \frac{d}{d\tau}(\frac{-\vec{p}}{p^3}) \quad =>$$

$$\frac{d\vec{u}}{d\tau} = \frac{-\vec{p}}{p^3}$$

$$\frac{d\vec{p}}{d\tau} = \vec{u}$$

$$\vec{a}_{безразмерюе} = \frac{d\vec{u}}{d\tau} = \frac{-\vec{p}}{p^3}$$

Таким образом, мы получаем, что расстояние r измеряется в радиусах Земли, скорость v измеряется в первых космических скоростях Земли, ускорение a — в ускорениях свободного падения Земли, а время- в квадратных корнях из (R/g):

$\vec{r} = \vec{p}R$

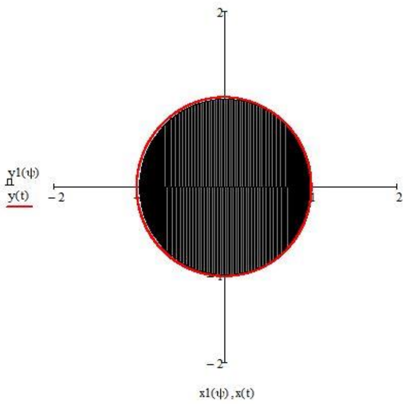
$\vec{v} = \vec{u}V1$

$\vec{a} = \vec{a}_{безразмерюе}g$

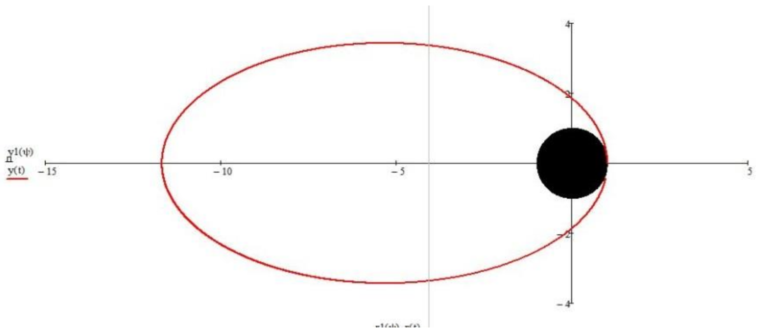
$t = \tau\sqrt{\frac{R}{g}}$

Запишем в Mathcad код программы для данной задачи в безразмерном варианте *(см. приложение 1)*. Получаем:

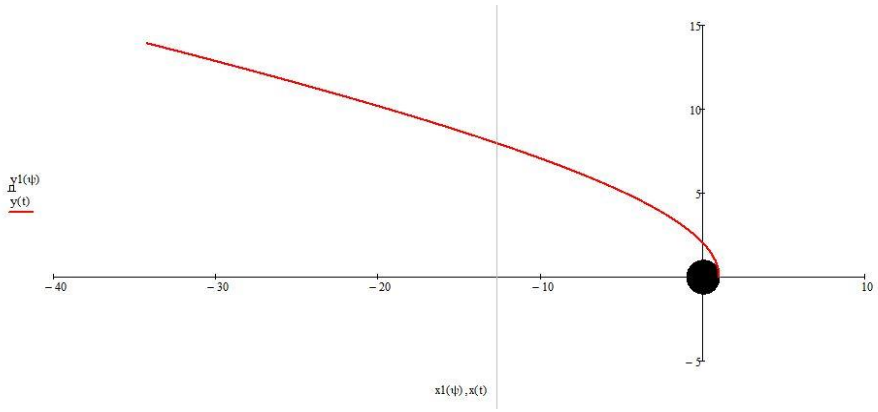
Если запустить пылинку (тело незначительной массы) с начальной скоростью, равной первой космической скорости, видим, что пылинка стала спутником и движется по круговой орбите.



Увеличивая начальную скорость, пылинка начинает двигаться по эллипсу.



И когда начальная скорость пылинки равняется второй космической скорости, она улетает по параболе.



Эти результаты совпадают с аналитическим решением задачи двух тел.

ГЛАВА II.ЗАДАЧА ТРЁХ ТЕЛ.

2.1.История задачи 3-х тел

Мне понравился функционал программы Mathcad, заинтересовало гравитационное взаимодействие тел. И я решила выяснить, как же обстоит дело с тремя телами?

Опять к истории. Движением Луны управляют в основном два тела Земля и Солнце. В начале XVIII в. осознали, что движение Луны по небу можно использовать для навигации. Этот метод требовал точных предсказаний положения Луны на небе. Очевидно, для начала следовало записать следствия из законов Ньютона для трех тел. Затем следовало решить полученные дифференциальные уравнения. Однако методы, позволяющие в задаче двух тел перейти к эллипсам, в задаче для трёх тел оказались неприменимы: *добавление третьего тела портило всю картину*. В 1747г. Жан д'Аламбер и Алексис Клеро попытались решить эту задачу с помощью численных приближений. *Задача трёх тел обрела название и стала одной из великих загадок математики.*

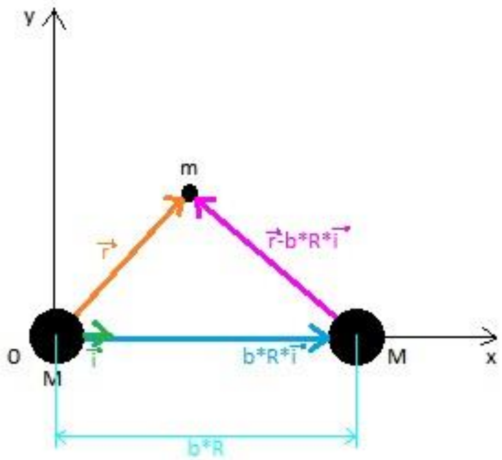
Некоторые частные случаи этой задачи удавалось решить. В 1767 г. Леонард Эйлер обнаружил решения, в которых все три тела лежат на вращающейся прямой. В 1772 г. Жан-Луи-Лагранж нашел аналогичные решения для случая, когда тела образуют вращающийся равносторонний треугольник. *Оба решение* *оказались периодическими: тела повторяли одну и ту же последовательность движений до бесконечности.*

В 1889 г. к юбилею короля Норвегии был объявлен конкурс на решение задачи трёх тел (замахнулись на N тел). Решение должно было представлять не точную формулу – к тому времени уже было ясно, что это означало бы требовать слишком многого, - а некий сходящийся ряд. Анри Пуанкаре, решил начать с очень простой версии: *ограниченной задачи трёх тел*, где масса одного из тел пренебрежимо мала, как, скажем у пылинки. *Пылинка испытывает гравитационное воздействие двух других тел, а вот они её полностью игнорируют.*

Исследуя задачу двух тел на примере Земли и пылинки, я осознала мощь программы Mathcad. А история задачи трёх тел меня заинтриговала ещё больше, я захотела опробовать методы компьютерного моделирования и для неё. Именно ограниченную задачу трёх тел я выбрала для своего исследования.

2.2.Статическая задача 3-х тел.

Первым я рассмотрела случай движения пылинки в поле тяготения двух статичных планет (массивных тел) одинаковой массы.



Запишем уравнение 2-го закона Ньютона для пылинки массой m, находящейся в поле тяготения двух планет:

$$m\vec{a} = \frac{-mM\vec{r}}{r^3} + \frac{-mMG(\vec{r} - bR\vec{i})}{\left|\vec{r} - bR\vec{i}\right|}$$

Сократим массу и подставим значение модуля и проекций:

$$(\vec{r} - bR\vec{i})_x = x - bR$$

$$(\vec{r} - bR\vec{i})_y = y$$

$$\left|\vec{r} - bR\vec{i}\right| = \sqrt{(x - bR)^2 + y^2}$$

Спроецируем вектор ускорения на оси Ох и Оу:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{-MGx}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{MG(x - bR)}{((x - bR)^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{-MGy}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{MGy}{((x - bR)^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

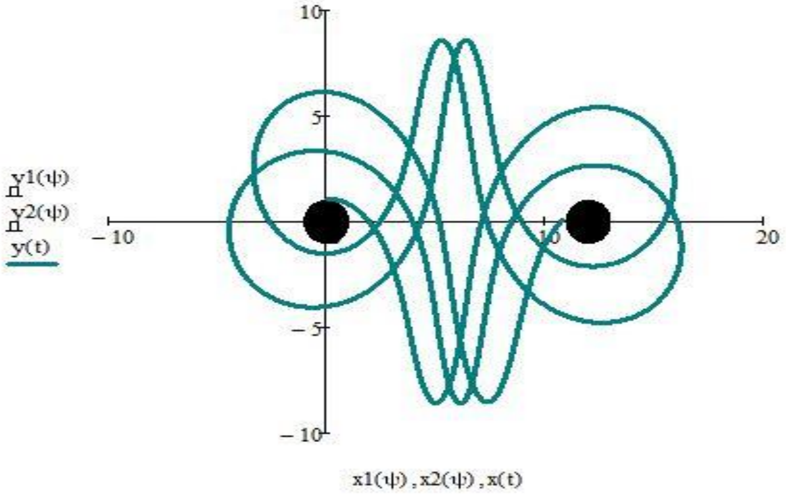
Данное ускорение является центростремительным, поэтому можем записать его в таком виде:

$a = \frac{V1^2}{R} = \frac{MG}{R^2}$, где $V1 = \sqrt{\frac{MG}{R}}$ — первая космическая скорость.

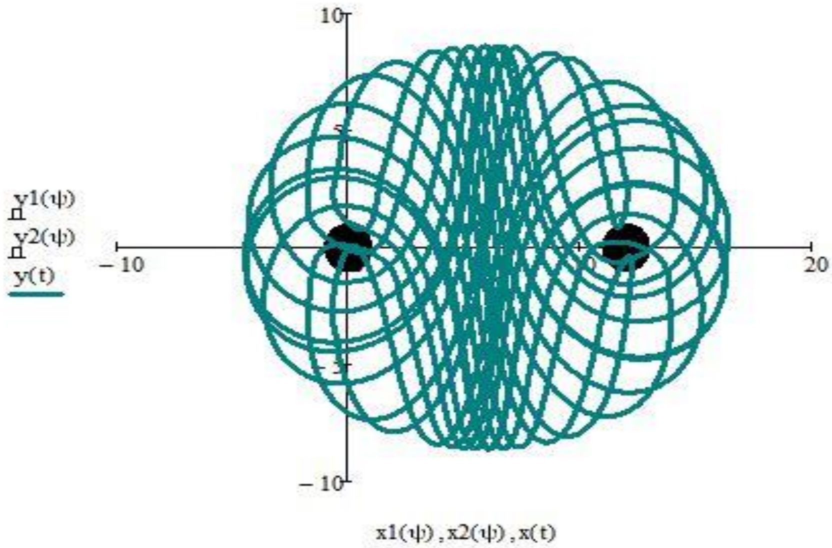
Обезразмеривая величины, получаем соответствующие формулы:

$$\vec{r} = \vec{p}R \qquad \vec{v} = \vec{u}V1 = \vec{u}\sqrt{\frac{MG}{R}} \qquad t = \tau\sqrt{\frac{R}{g}}$$

Пользуясь построенной мной моделью, я смогла получить хореографию (замкнутую, циклическую траекторию движения пылинки) при u=1.2669 p=1.1. Так она выглядит на промежутке времени от 1 до 500 с шагом 0.01:



На промежутке времени от 1 до 2000 с тем же шагом она выглядит так:



Безразмерный код программы для данной задачи в (*см. приложение 2)*.

Но можно добавить к этой же модели ещё одно интересное условие (в блок начальных условий):

По закону сохранения углового момента: $mv_0R = mvr$. Теперь сократим на массу и выразим $v = v_0\frac{R}{r}$ (1) . Запишем закон сохранения энергии для пылинки: $\frac{m{v_0}^2}{2} - \frac{mMG}{R} = \frac{mv^2}{2} - \frac{mMG}{r}$. Это уравнение сократим на массу *m*, домножим на 2:

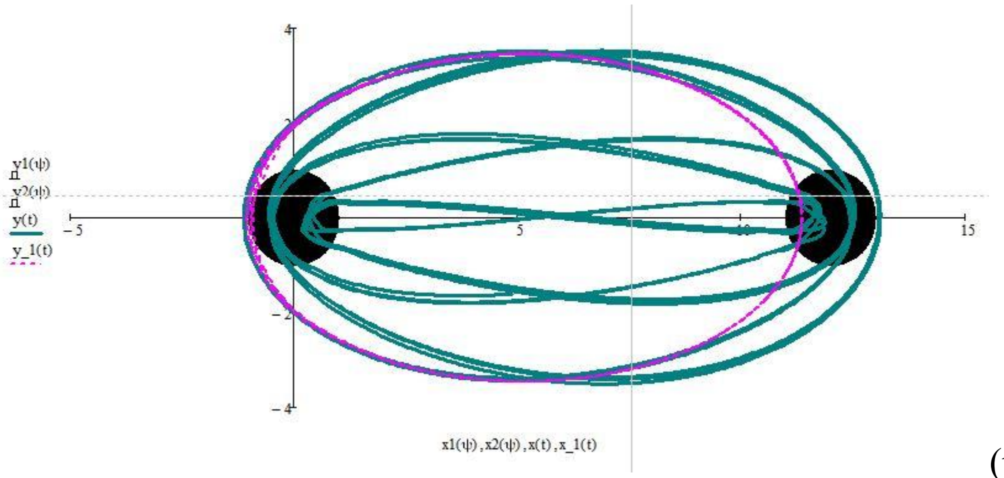
$v_0{}^2 - \dfrac{2MG}{R} = v^2 - \dfrac{2MG}{r}$. Подставим (1): $v_0{}^2 - \dfrac{2MG}{R} = v_0{}^2 \dfrac{R^2}{r^2} - \dfrac{2MG}{r}$.

Перенесем члены с общим множителем и вынесем его за скобки, дроби в скобках приведем к общему знаменателю: $v_0{}^2(\dfrac{r^2 - R^2}{r^2}) = 2MG(\dfrac{r-R}{rR})$

$v_0{}^2 \dfrac{r+R}{r} = \dfrac{2MG}{R}$.

Выразим $v_0{}^2 = \dfrac{2MG}{R} \dfrac{r}{r+R}$ $\quad v_0{}^2 = (\sqrt{2}V1)^2 \dfrac{p}{p+1}$ $\quad \left(\dfrac{v_0}{V1}\right)^2 = \dfrac{2p}{p+1}$ $\quad u^2 = \dfrac{2p}{p+1}$

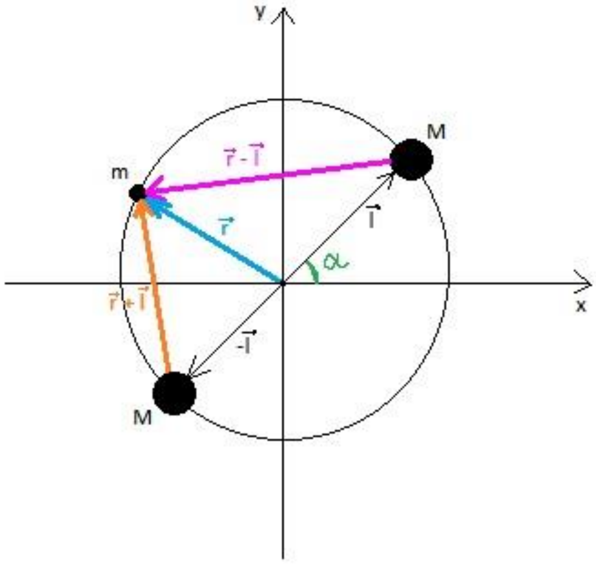
$u = \sqrt{\dfrac{2p}{p+1}}$. А корректировать u в нужную сторону будем с помощью коэффициента γ $(\gamma \times u)$. Таким образом, с помощью этого дополнительного условия мы можем получить такую траекторию пылинки:



(розовым пунктиром показано, как двигалась бы пылинка, если бы не взаимодействовала со второй планетой) $\gamma = 1.00858$

2.3.Динамическая задача 3-х тел.

Следующим я рассмотрела случай движения пылинки в поле тяготения двух Звезд (двух массивных тел) одинаковой массы, обращающихся вокруг общего центра масс.



Запишем 2-ой закон Ньютона для этой системы:

$$m\ddot{\vec{r}} = \frac{-mMG}{\left|\vec{r}+\vec{l}\right|^3}(\vec{r}+\vec{l}) - \frac{mMG}{\left|\vec{r}-\vec{l}\right|^3}(\vec{r}-\vec{l})$$

Сократим на m:

$$\ddot{\vec{r}} = -MG\left(\frac{\vec{r}+\vec{l}}{\left|\vec{r}+\vec{l}\right|^3} + \frac{\vec{r}-\vec{l}}{\left|\vec{r}-\vec{l}\right|^3}\right)$$

R — радиус звезды

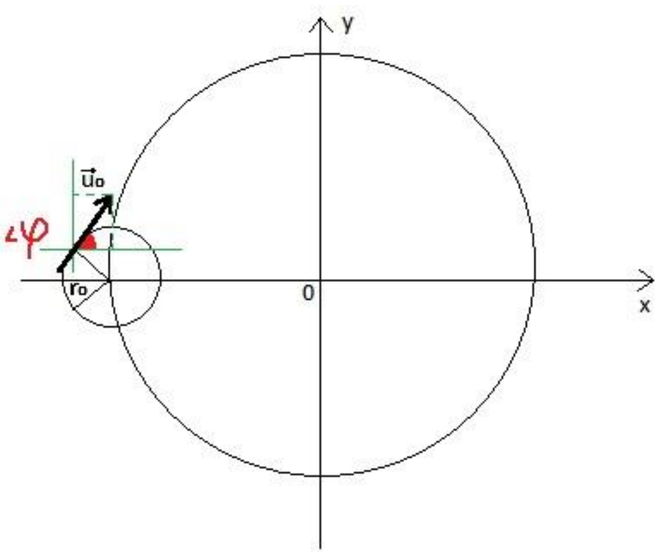
$g = \dfrac{MG}{R^2}$ — ускорение свободного падения на поверхности звезды

$V1 = \sqrt{gR} = \sqrt{\dfrac{MG}{R}}$ — первая космическая скорость для звезды

Начальные условия:

$u_x(0) = u_0 \cos\varphi \qquad u_y(0) = u_0 \sin\varphi$

$x(0) = -(\alpha + r_0 \cos\varphi) \qquad y(0) = r_0 \sin\varphi$



Параметр $\alpha = \frac{l}{R}$ задает расстояние между звездами

Перейдем к новым обозначениям:

$\vec{r} = R\vec{p} \qquad \vec{l} = \alpha R\vec{i}$

$$R\ddot{\vec{p}} = \frac{-MG}{R^2}\left(\frac{\vec{p}+\alpha\vec{i}}{\left|\vec{p}+\alpha\vec{i}\right|^3} + \frac{\vec{p}-\alpha\vec{i}}{\left|\vec{p}-\alpha\vec{i}\right|^3}\right) \quad (1)$$

$$t = \tau\sqrt{\frac{R}{g}} \qquad \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = R\sqrt{\frac{g}{R}}\frac{d\vec{p}}{d\tau} \qquad \frac{d\vec{v}}{dt} = V1\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{p}}{dt}\right)\right) = V1\sqrt{\frac{g}{R}}\left(\frac{d}{d\tau}\left(\frac{d\vec{p}}{d\tau}\right)\right)$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \sqrt{gR}\sqrt{\frac{g}{R}}\ddot{\vec{p}} = g\ddot{\vec{p}}$$

Вернемся на шаг назад и заменим в (1) $R\ddot{\vec{p}}$ на $\frac{d\vec{v}}{dt}$ и учтем, что $g = \frac{MG}{R^2}$

$$g\ddot{\vec{p}} = -g\left(\frac{\vec{p}+\alpha\vec{i}}{\left|\vec{p}+\alpha\vec{i}\right|^3} + \frac{\vec{p}-\alpha\vec{i}}{\left|\vec{p}-\alpha\vec{i}\right|^3}\right) \qquad \ddot{\vec{p}} = -\left(\frac{\vec{p}+\alpha\vec{i}}{\left|\vec{p}+\alpha\vec{i}\right|^3} + \frac{\vec{p}-\alpha\vec{i}}{\left|\vec{p}-\alpha\vec{i}\right|^3}\right)$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = R\sqrt{\frac{g}{R}}\frac{d\vec{p}}{d\tau} = V1\frac{d\vec{p}}{d\tau}$$

Зависимость $i(t)$:

$$\vec{l} = \alpha R\vec{i} \qquad l_x = \alpha R\cos\varphi(t) \qquad l_y = \alpha R\sin\varphi(t)$$

$$i_x = \cos\varphi(t) \qquad i_y = \sin\varphi(t)$$

$\varphi(t) = \omega t$, где $\omega = \frac{2\pi}{T}$, а T — период обращения в системе

$$a_ц = \omega^2 l \Rightarrow \quad M\omega^2 l = \frac{M^2 G}{4l^2} \quad \Rightarrow \quad \omega^2 = \frac{MG}{4l^3} = \frac{MG}{4\alpha^3 R^3} = \frac{g}{4\alpha^3 R}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{R}} \frac{1}{2\alpha^{\frac{3}{2}}} \quad \Rightarrow \quad \varphi(t) = \omega t = \omega \sqrt{\frac{R}{g}} \tau = \frac{\tau}{2\alpha^{\frac{3}{2}}}$$

$$i_x = \cos\left(\frac{\tau}{2\alpha^{\frac{3}{2}}}\right) \qquad i_y = \sin\left(\frac{\tau}{2\alpha^{\frac{3}{2}}}\right)$$

$$\vec{v} = V1 \frac{d\vec{p}}{d\tau} \qquad V1 = \sqrt{\frac{MG}{R}} \qquad \tau = t\sqrt{\frac{g}{R}} \qquad T = \frac{2\pi}{\omega} = 4\pi\alpha^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{R}{g}}$$

$$\frac{du_x}{d\tau} = -\frac{x + \alpha i_x}{(x^2 + y^2 + \alpha^2 + 2\alpha(x i_x + y i_y))^{3/2}} - \frac{x - \alpha i_x}{(x^2 + y^2 + \alpha^2 - 2\alpha(x i_x + y i_y))^{3/2}}$$

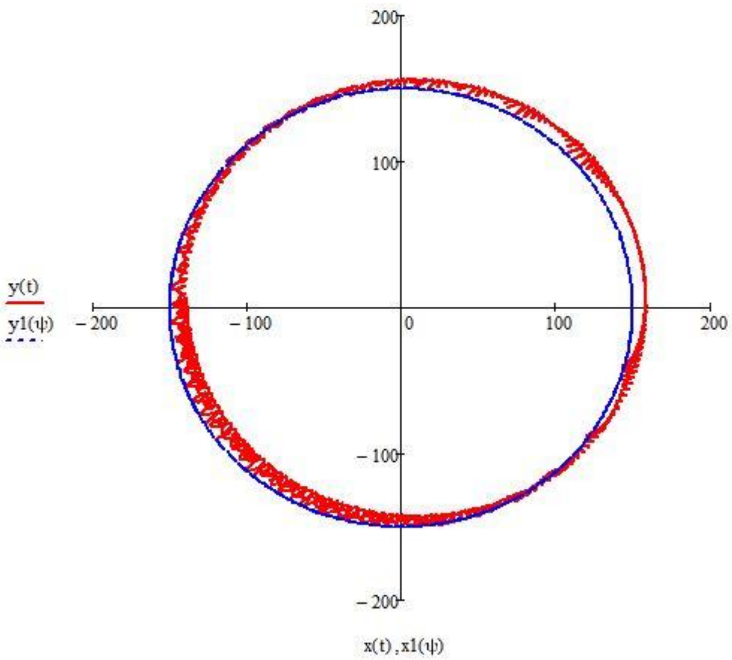
$$\frac{du_y}{d\tau} = -\frac{y + \alpha i_y}{(x^2 + y^2 + \alpha^2 + 2\alpha(x i_x + y i_y))^{3/2}} - \frac{y - \alpha i_y}{(x^2 + y^2 + \alpha^2 - 2\alpha(x i_x + y i_y))^{3/2}}$$

$$\frac{dx}{d\tau} = u_x \qquad \frac{dy}{d\tau} = u_y$$

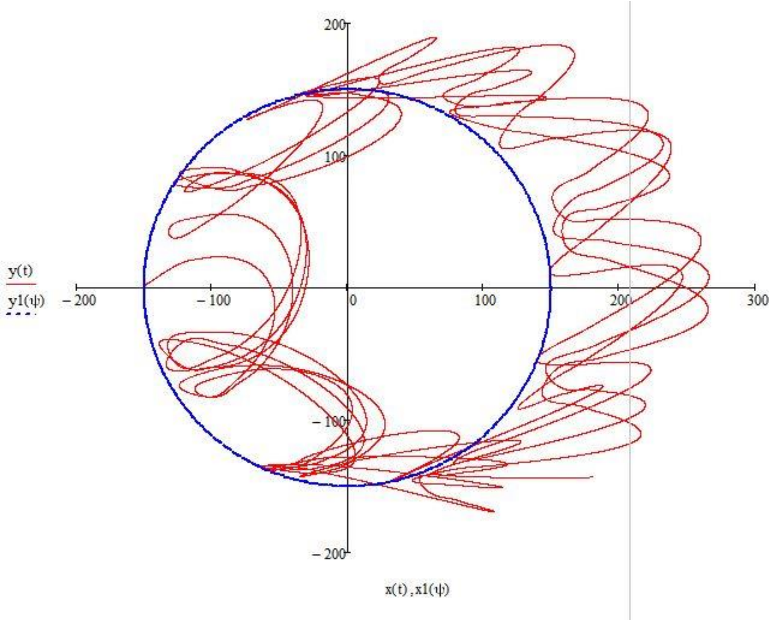
Безразмерный код программы для этой задачи (*см. приложении 3*).

Запуская пылинку со скоростью близкой к первой космической $(u = 1.17)$, получаем:

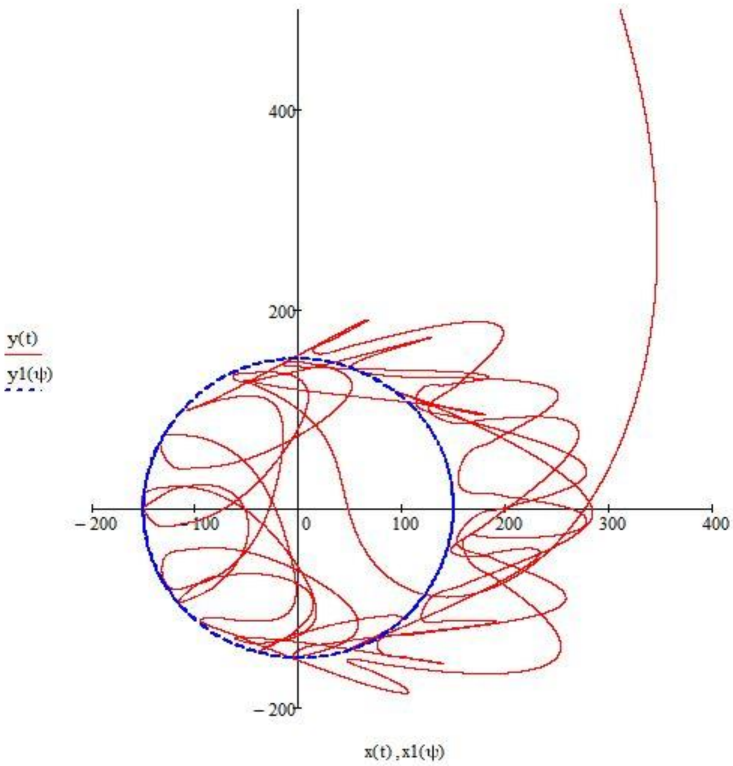
(синий пунктир — траектория движения звезд; красная линия — траектория пылинки)



Увеличим скорость до $u = 1.2184$:

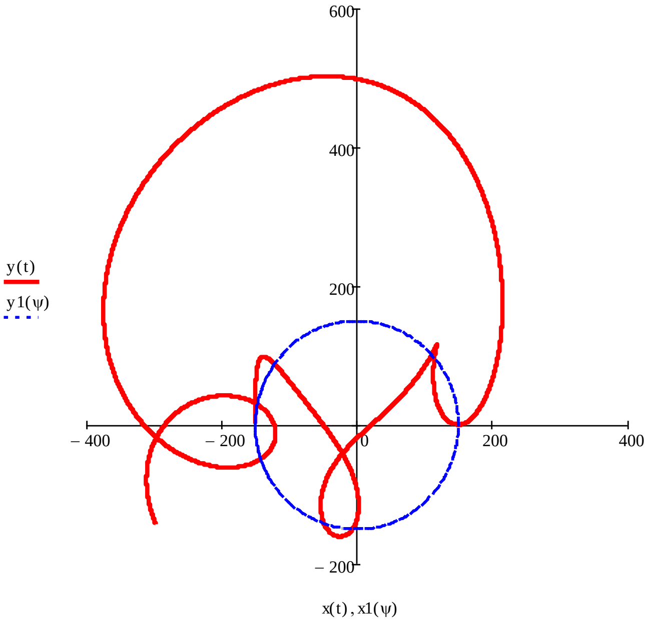


И ещё увеличим скорость $(u = 1.21865)$:



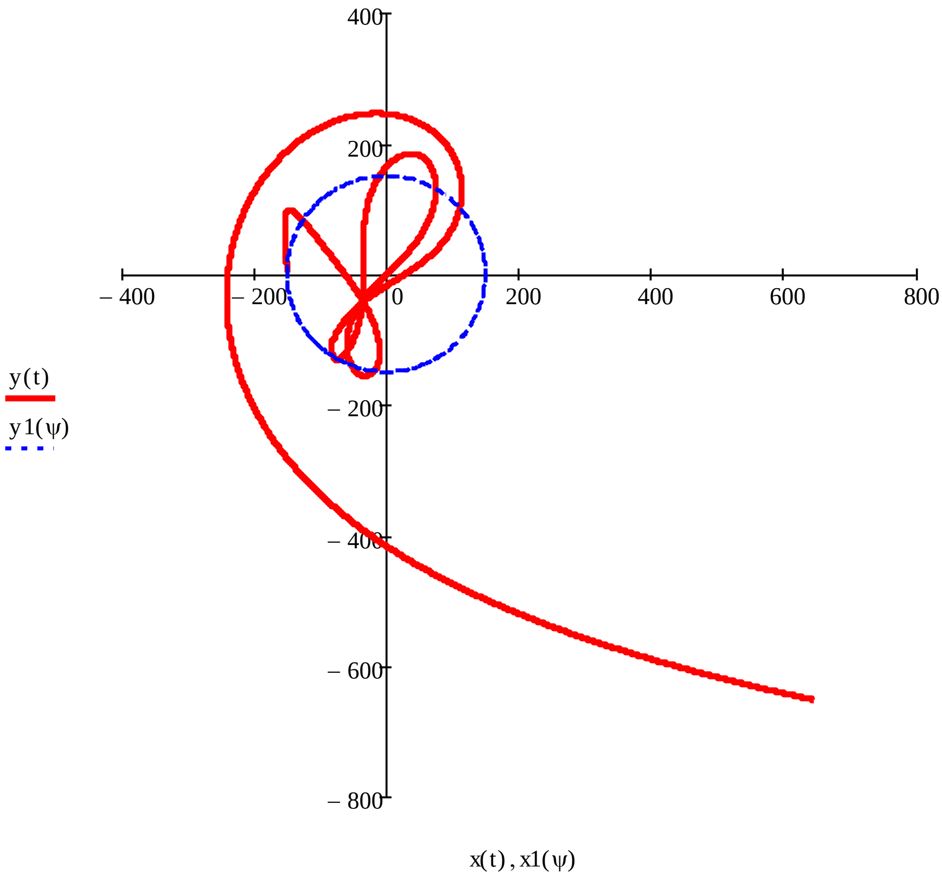
Из последних двух случаев можем увидеть: совсем немного изменив начальную скорость пылинки (на 0,021%), она вытесняется системой двух звезд и улетает от них, не обладая второй космической скоростью.

Запустим пылинку немного, изменив начальные условия:



$r_0 = 1.25; U_0 = 1.22; \alpha = 90^0$

А теперь изменим угол запуска на 1 градус:



$r_0 = 1.25; U_0 = 1.22; \alpha = 91^0$

Видим, что пылинка снова вылетела из системы, не обладая второй космический скоростью. Таким образом, мы можем оценить влияние звезд на пылинку и увидеть ту самую хаотичность (случайность) в задаче трёх тел. Это доказывает невозможность нахождения точного аналитического решения задачи.

2.4.Итоги.

Для каждой из трёх рассмотренных задач:

1.Записаны уравнения движения в форме второго закона Ньютона.

2.Приведено решение системы уравнений в программе Mathcad.

3.Получены траектории пылинки (тела незначительной массы) для разных её начальных скоростей.

4.Произведен краткий анализ полученных результатов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ.

Такие результаты были мной получены, и я не планирую останавливаться на них. Очень хочется посмотреть и проанализировать другие, не менее захватывающие случаи ограниченной задачи трёх тел. На очереди уже стоит модель Лагранжа с вращающимся равносторонним треугольником.

Подводя итоги, хочу добавить, что если задача трёх тел сложна, то задача N тел, то есть произвольного числа точечных масс, движущихся под действием ньютоновского тяготения, безусловно, еще сложнее. Тем не менее природа представляет нам наглядный пример — Солнечная система. В неё входят восемь планет, несколько карликовых планет, таких как Плутон, и тысячи астероидов, в том числе довольно крупных. Это не говоря о спутниках планет, некоторые из которых — Титан, превосходит по размеру планету Меркурий. Таким образом, Солнечная система — это задача 10, 20 или 1000 тел в зависимости от степени детализации. Стабильна ли Солнечная система. Каково её будущее? Ответ на этот вопрос пытались найти И.Ньютон, Ж.Л.Лагранж и многие другие в XVII-XIX в.в. Ответ упирался в проблему трёх тел.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.

1. Дьяконов В.П. Mathcad 8-12 для всех. М.: СОЛОН-Пресс, 2005, 632 стр.
2. Мякишев Г.Я., Синяков А.З. Физика: Механика. 10 кл. Углубленный уровень : учебник. Дрова, 2016, 510 стр.
3. Павленко Ю. Г. Начала физики: Учебник. — 4-е изд., Издательство «Экзамен», 2007, 862 стр.
4. Стюарт И. Величайшие математические задачи. Издательство «Альпина Диджитал», 2013, 460 стр.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1.

В этой и следующих программах: r0 — безразмерная величина расстояния

U0 — безразмерная величина скорости

Начальные условия:

$r0 := 1.01 \qquad U0 := 1.2 \qquad \alpha 0 := 90$

$$\phi 0 := \frac{\pi \cdot \alpha 0}{180}$$

Решение уравнений движения:

Given

$$\frac{d}{dt}Ux(t) = \frac{-x(t)}{\left(x(t)^2 + y(t)^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{d}{dt}Uy(t) = \frac{-y(t)}{\left(x(t)^2 + y(t)^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$Ux(0) = U0 \cdot \cos(\phi 0) \qquad Uy(0) = U0 \cdot \sin(\phi 0) \qquad x(0) = r0 \qquad y(0) = 0$

$$\begin{pmatrix} Ux \\ Uy \\ x \\ y \end{pmatrix} := \mathrm{Odesolve}\left[\begin{pmatrix} Ux \\ Uy \\ x \\ y \end{pmatrix}, t, 100\right]$$

Построение Земли

$y1(\psi) := \sin(\psi) \qquad x1(\psi) := \cos(\psi)$

Построение траектории движения:

$t := 0, 0.01 .. 100$

ПРИЛОЖЕНИЕ 2.

Две одинаковые планеты находящиеся на расстоянии

$\alpha := 12$

Начальные условия:

$r0 := 1.1 \qquad U0 := 1.2669 \qquad \alpha0 := 0$

$$\phi0 := \frac{\pi \cdot \alpha0}{180}$$

Решение уравнений движения:

Given

$$\frac{d}{dt}Ux(t) = \frac{-x(t)}{\left[(x(t))^2 + y(t)^2\right]^{\frac{3}{2}}} - \frac{x(t) - \alpha}{\left[(x(t) - \alpha)^2 + y(t)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{d}{dt}Uy(t) = \frac{-y(t)}{\left[(x(t))^2 + y(t)^2\right]^{\frac{3}{2}}} - \frac{y(t)}{\left[(x(t) - \alpha)^2 + y(t)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{d}{dt}x(t) = Ux(t) \qquad \frac{d}{dt}y(t) = Uy(t)$$

$Ux(0) = U0 \cdot \cos(\phi0) \qquad Uy(0) = U0 \cdot \sin(\phi0) \qquad x(0) = 0 \qquad y(0) = r0$

$$\begin{pmatrix} Ux \\ Uy \\ x \\ y \end{pmatrix} := \mathrm{Odesolve}\left[\begin{pmatrix} Ux \\ Uy \\ x \\ y \end{pmatrix}, t, 500\right]$$

Построение Земли

$y1(\psi) := \sin(\psi) \qquad x1(\psi) := \cos(\psi)$

Построение "второй" Земли

$y2(\psi) := \sin(\psi) \qquad x2(\psi) := \cos(\psi) + \alpha$

Построение траектории движения:

$t := 0, 0.01 .. 500$

ПРИЛОЖЕНИЕ 3.

Две одинаковые звезды находящиеся на расстоянии

$\alpha := 150$

Начальные условия:

$r0 := 1.25 \qquad U0 := 1.17 \qquad \alpha 0 := 69 \quad \phi 0 := \dfrac{\pi \cdot \alpha 0}{180}$

Период обращения

$T := 4 \cdot \pi \cdot \alpha^{\frac{3}{2}} \qquad T = 2.309 \times 10^{4}$

Решение уравнений движения:

Given

$$\frac{d}{dt}Ux(t) = \frac{-x(t) - \alpha \cdot \cos\left(\alpha^{\frac{-3}{2}} \cdot \frac{t}{2}\right)}{\left[x(t)^2 + y(t)^2 + \alpha^2 + 2\alpha \cdot \left(x(t) \cdot \cos\left(\alpha^{\frac{-3}{2}} \cdot \frac{t}{2}\right) + y(t) \cdot \sin\left(\alpha^{\frac{-3}{2}} \cdot \frac{t}{2}\right)\right)\right]^{\frac{3}{2}}} - \frac{x(t) - \alpha \cdot \cos\left(\alpha^{\frac{-3}{2}} \cdot \frac{t}{2}\right)}{\left[x(t)^2 + y(t)^2 + \alpha^2 - 2\alpha \cdot \left(x(t) \cdot \cos\left(\alpha^{\frac{-3}{2}} \cdot \frac{t}{2}\right) + y(t) \cdot \sin\left(\alpha^{\frac{-3}{2}} \cdot \frac{t}{2}\right)\right)\right]^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{d}{dt}Uy(t) = \frac{-y(t) - \alpha \cdot \sin\left(\alpha^{\frac{-3}{2}} \cdot \frac{t}{2}\right)}{\left[x(t)^2 + y(t)^2 + \alpha^2 + 2\alpha \cdot \left(x(t) \cdot \cos\left(\alpha^{\frac{-3}{2}} \cdot \frac{t}{2}\right) + y(t) \cdot \sin\left(\alpha^{\frac{-3}{2}} \cdot \frac{t}{2}\right)\right)\right]^{\frac{3}{2}}} - \frac{y(t) - \alpha \cdot \sin\left(\alpha^{\frac{-3}{2}} \cdot \frac{t}{2}\right)}{\left[x(t)^2 + y(t)^2 + \alpha^2 - 2\alpha \cdot \left(x(t) \cdot \cos\left(\alpha^{\frac{-3}{2}} \cdot \frac{t}{2}\right) + y(t) \cdot \sin\left(\alpha^{\frac{-3}{2}} \cdot \frac{t}{2}\right)\right)\right]^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{d}{dt}x(t) = Ux(t)$$

$$\frac{d}{dt}y(t) = Uy(t)$$

$Ux(0) = U0 \cdot \cos(\phi 0)$

$Uy(0) = U0 \cdot \sin(\phi 0)$

$x(0) = -(\alpha + r0 \cdot \cos(\phi 0))$

$y(0) = r0 \cdot \sin(\phi 0)$

$$\begin{pmatrix} Ux \\ Uy \\ x \\ y \end{pmatrix} := \mathrm{Odesolve}\left[\begin{pmatrix} Ux \\ Uy \\ x \\ y \end{pmatrix}, t, 50000\right]$$

Траектория звезд

$x1(\psi) := \alpha \cdot \cos(\psi)$ $\qquad$ $y1(\psi) := \alpha \cdot \sin(\psi)$

Построение траектории движения:

$t := 0, 1 .. 30000$