Научно-исследовательская работа

Математика

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В ЗАДАЧАХ НА ПРОЦЕНТЫ

Выполнил:

Корнеев Алексей Сергеевич

обучающийся 11 класса

МОУ «Темповская СОШ

Ртищевского района Саратовской области», Россия

Руководитель:

Кравцов Виталий Викторович,

учитель математики

МОУ «Темповская СОШ

Ртищевского района Саратовской области», Россия

Оглавление

Введение.

Задачи на проценты нередко встречаются в школьном курсе математики. С процентами мы познакомились еще в пятом классе, но тогда это были задачи на простые проценты, которые мне легко давались. Но существуют такие задачи на проценты, которые вызывают значительные трудности. В этом году мне предстоит сдать единый государственный экзамен по математике профильного уровня, в котором встречаются задачи на проценты. Для меня важно с успехом сдать ЕГЭ по математике, поэтому я хочу научиться как можно быстрее решать тестовую часть, чтобы оставалось больше времени на задания с развернутым ответом. Именно поэтому предметом моего исследования являются математические модели в задачах на проценты.

Решая очередной вариант тренировочных вариантов КИМ, я встретился с определёнными трудностями. Это была, как мне казалось, довольно сложная задача на проценты, которую решить обычным способом мне не удалось. Получались громоздкие алгебраические выражения, в которых легко запутаться, что со мной и случалось. Поэтому я решил обратиться к математическому моделированию, которое, на мой взгляд, делает решение подобных задач наименее трудоемким.

Цель моей работы – рассмотреть основные виды математических моделей, применимых к решению задач на проценты, и выбрать наиболее оптимальные к конкретной из них.

К постановке этой цели меня привела следующая **проблема:** в настоящее время человек живет в стремительном информационном потоке, который необходимо представлять в упрощенном виде для принятия правильных решений в любой ситуации.

Исходя из цели, были поставлены следующие **задачи:**

1. Проанализировать научно-учебную литературу по теме работы.
2. Научиться составлять математические модели различного типа.
3. Выявить оптимальный метод математического моделирования для решения конкретной задачи на проценты.

Гипотеза: Существует универсальная математическая модель, с помощью которой можно решить любую текстовую задачу на проценты.

Объект исследования: текстовые задачи на проценты различного типа.

Методы исследования: анализ, аналогия, обобщение, прогнозирование, эксперимент.

Основная часть

Глава I. Математическое моделирование, как метод решения задач.

1.1 Что такое математическая модель.

Я уже занимался изучением этого вопроса применительно к текстовым задачам различного типа. Поэтому кратко напомню, что представляет собой математическая модель задачи.

В различных источниках даются разные понятия математической модели, но эти определения имеют одинаковую суть. Математическая модель представляет собой формализованное описание на языке математики исследуемого объекта. Таким формализованным описанием может быть уравнение, система линейных, нелинейных или дифференциальных уравнений, система неравенств, определенный интеграл, многочлен с неизвестными коэффициентами и т. д. Могут быть также рисунки, схемы, геометрические фигуры и т. д. Математическая модель должна охватывать важнейшие характеристики исследуемого объекта и отражать связи между ними.

1.2 Что значит смоделировать задачу.

1. **Постановка задачи.**

На этом этапе требуется четкое понимание поставленной задачи.

2. **Изучение теоретических основ и сбор информации об объекте оригинала.**

Подбирается или разрабатывается подходящая теория.

3. **Формализация.**

Заключается в выборе системы условных обозначений.

4. **Выбор метода решения.**

На этом этапе устанавливаются окончательные параметры моделей с учетом условия функционирования объекта.

5. Реализация модели.

Выполнятся построение математической модели (строится график, таблица, рисунок или эскиз, граф) и решается задача исходя из новых условий.

6. Анализ полученной информации.

Сопоставляется полученное и предполагаемое решение.

Проверка адекватности реальному объекту.

Результаты, полученные по модели, сопоставляются с условиями исходной задачи.

1.3 Виды задач на проценты.

Для того чтобы с успехом решать задачи на проценты, необходимо четко понимать, что такое процент. Самое очевидное определение: процент – это десятичная или обыкновенная дробь, равная одной сотой части величины, о которой идёт речь в задании. Только проблема в том, что в задачах на проценты эту величину чаще всего маскируют, именно поэтому решение вызывает трудности. Отыскать её и правильно выразить данные задачи и есть причина неверных решений.

Задачи на проценты бывают самых различных типов.

1. Нахождение процента от числа.
2. Нахождение числа по его проценту.
3. Нахождение процентного отношения двух чисел.
4. Увеличение и уменьшение числа на процент.
5. Задачи на простые проценты.
6. Задачи на сложные проценты.

В своем исследовании я буду рассматривать задачи из КИМ по математике профильного уровня, в котором задачи на проценты встречаются в заданиях 1, 11 и 17. Для каждой из выбранных задач я буду составлять математические модели, после чего выберу оптимальную модель для каждого типа. Начнем от простого к сложному.

Глава II. Некоторые виды моделей в задачах на проценты различной степени сложности.

2.1 Задачи на простые проценты.

Задача 1. ***(Вариант 28. КИМ ЕГЭ – 2021)***[1].

Тетрадь стоит 13 рублей. Сколько рублей заплатит покупатель за 40 тетрадей, если при покупке больше 30 тетрадей магазин делает скидку 10% от стоимости всей покупки?

Модель №1. Пропорция.

Для начала найдем то самое число, от которого будем искать процент.

1) 13 · 40 = 520 (р.) – стоимость всей покупки без скидки.

Если скидка на покупку составляет 10% от стоимости, то стоимость покупки будет 90% от стоимости.

Пусть ***X*** рублей – стоимость покупки со скидкой.

Теперь составим пропорцию, которая будет являться математической моделью:

520 рублей – 100%

X рублей – 90%

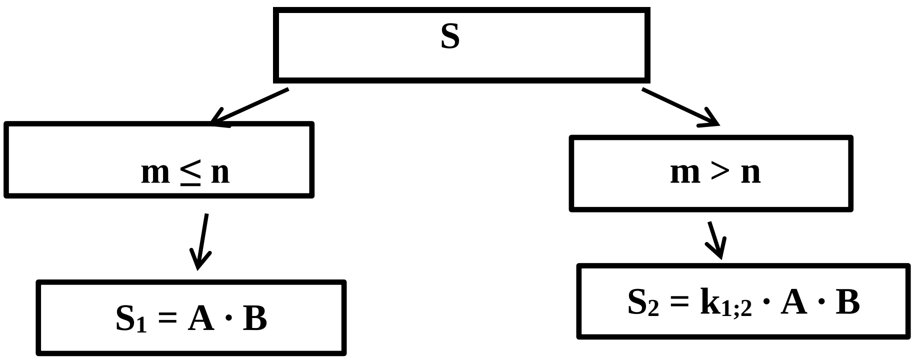
Зависимость прямо пропорциональная => $\frac{520}{X} = \frac{100}{90}$.

Выразим $\boldsymbol{x}$: $\boldsymbol{x} = \frac{\mathbf{90 \cdot 520}}{\mathbf{100}} = 468$ (р.) - стоимость покупки.

Ответ: 468 рублей.

Модель № 2. Схема «Кубики».

Известно, что покупатель приобрел 40 тетрадей, при условии, что при покупке больше 30 тетрадей делается скидка 10 процентов от суммы всей покупки. Составим математическую модель, которая будет наглядно демонстрировать весь процесс покупки.



S – предполагаемая стоимость покупки

A – стоимость тетрадей без скидки;

B – количество купленных тетрадей;

m – количество покупаемых тетрадей;

n – предельное количество тетрадей без скидки;

k% – «скидка» (или «наценка» на товар);

$k_1 < 100\%$, значит «скидка», => $k_1 = 1 - 0{,}01k$;

$k_2 > 100\%$, значит «наценка», => $k_2 = 1 + 0{,}01k$;

Составим математическое выражение, характеризующее процесс покупки.

m = 40; => m > n; => предоставляется скидка (или «наценка»). Решаем по правой стороне схемы.

$S_2 = k_2 \cdot A \cdot B = (1 - 0{,}01k) \cdot A \cdot B = (1 - 0{,}01 \cdot 10) \cdot 40 = 0{,}9 \cdot 13 \cdot 40 =$

$= 468$ (р.).

Ответ: 468 рублей.

Итак, мною было составлено 2 математические модели, которые помогли решить задачу на проценты.

Большинство моих одноклассников решают задачу пропорцией. Это и понятно, так как эти задачи решаются с шестого класса. Однако разобравшись в схеме и научившись её составлять, можно не только глубже понять понятие «процент», ускорить решение подобных задач, но и применить умение при составлении алгоритмов и программ на уроках информатики, решать сложные жизненные задачи. На мой взгляд, такое восприятие понятия очень важно, при решении следующих задач.

2.2 Задачи на смеси и сплавы.

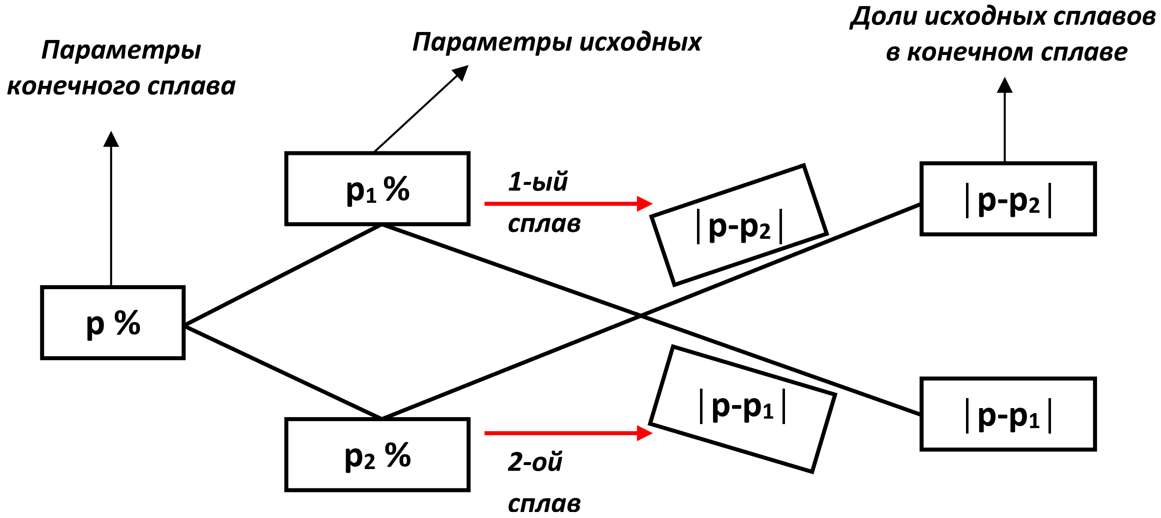
Рассмотрим задачи №11, в которых нередко встречаются задачи на смеси и сплавы.

Задача № 11. (Вариант 29. КИМ ЕГЭ – 2021)[1].

Имеется два сплава. Первый содержит 25% никеля, а второй – 30% никеля. Из этих двух сплавов получили третий сплав массой 150 кг, содержащий 28%

никеля. На сколько килограммов масса первого сплава была меньше массы второго?

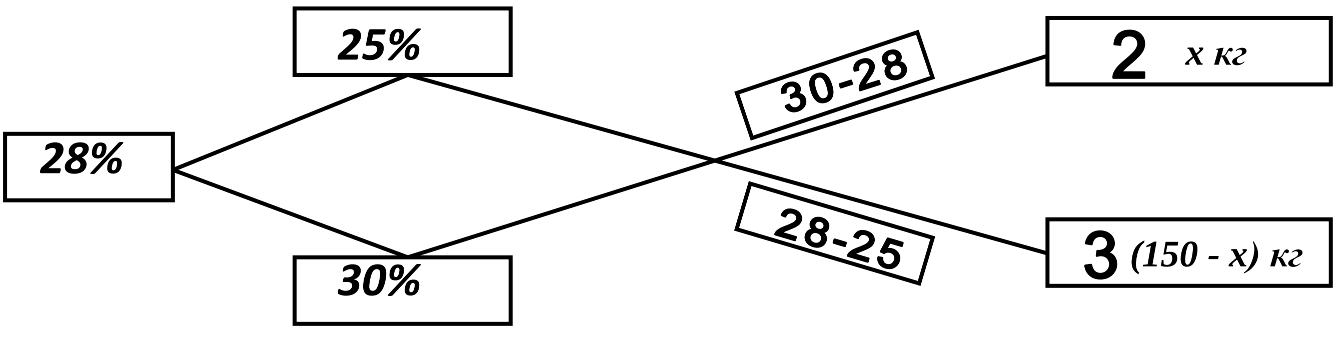
Модель №1. «Рыба».



Благодаря этой модели задачи на смеси и сплавы решаются очень просто, главное верно распределить данные из задачи:

1. Параметры конечного сплава: 28%
2. Параметры исходных сплавов: 1-ый сплав - 25%, 2-ой сплав - 30%.
3. Теперь находим модуль разности параметров (проще из большего значения параметра вычесть меньшее).

Пусть ***x кг*** - масса первого сплава, тогда масса второго сплава ***(150 - x) кг***.



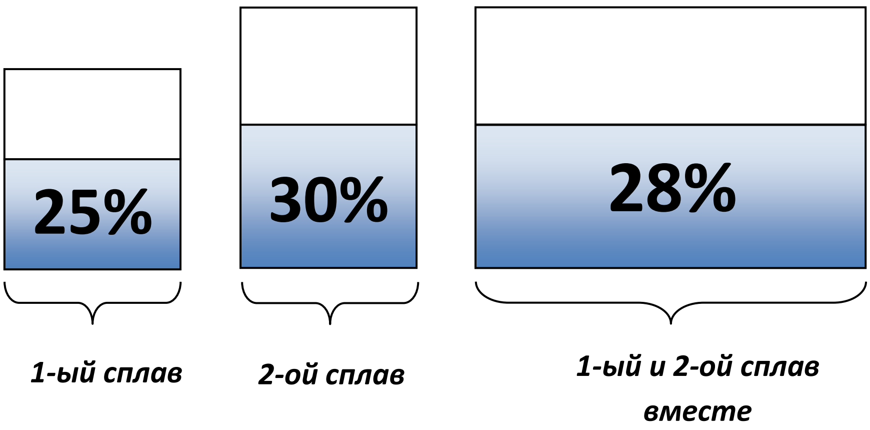
Составим пропорцию: $\frac{2}{3} = \frac{x}{150-x}$. Решив данное уравнение, получаем ***x = 60 (кг)*** – масса первого сплава, тогда масса второго сплава:

150 – 60 = 90 (кг).

Нам нужно узнать, на сколько килограммов масса первого сплава была меньше массы второго. Для этого вычтем из массы второго сплава массу первого. Получаем: ***90 – 60 = 30 (кг).***

Ответ: ***на 30 кг.***

Модель № 2. Схема «Кубики».



Пусть масса первого сплава ***x кг***, тогда масса второго сплава ***(150-x) кг.***

Масса никеля в первом сплаве равна ***0,25x кг***, а масса никеля во втором сплаве равна ***0,3(150-x) кг.*** Ещё мы можем найти массу никеля в третьем сплаве, т.к. известно его процентное содержание: ***0,28 · 150 = 42 (кг).***

Глядя на составленную математическую модель, можно легко составить уравнение:

$\mathbf{0,25}\boldsymbol{x} + \mathbf{0,3(150} - \boldsymbol{x}\mathbf{)} = \mathbf{42}$

$\mathbf{0,25}\boldsymbol{x} + \mathbf{45} - \mathbf{0,3}\boldsymbol{x} = \mathbf{42}$

$-\mathbf{0,05}\boldsymbol{x} = -\mathbf{3}$

$\boldsymbol{x} = \mathbf{60}$ ***(кг)*** – масса первого сплава;

тогда масса второго сплава - ***150 – 60 = 90 (кг).***

Ответим на главный вопрос задачи: ***90 – 60 = 30 (кг).***

Ответ: ***на 30 кг.***

Итак, у двух представленных математических моделей есть как преимущества, так и недостатки. Преимущество «Рыбы» состоит в быстроте решения, а достоинство «Схемы» в полном осмыслении задачи.

2.3 Задачи на сложные проценты.

Особое внимание мне бы хотелось уделить номеру 17 в сборниках КИМ, потому что эта задача дает три балла. В этом номере чаще всего встречаются задачи на сложные проценты.

Задача №17. (Вариант 27. КИМ ЕГЭ – 2021)[1].

15-го января планирует взять кредит в банке на 19 месяцев. Условия его возврата таковы:

• 1-го числа каждого месяца долг увеличивается на r процентов по сравнению с концом предыдущего месяца;

• со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

• 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита на 30% больше суммы, взятой в кредит. Найдите r.

Модель №1. «Уравнение-неравенство».

По условию, долг перед банком на 15-е число каждого месяца должен уменьшаться до нуля равномерно.

Пусть сумма кредита S рублей, тогда долг уменьшается следующим образом:

$$\mathbf{S};\ \frac{18S}{19};\ \frac{17S}{19};\ \ldots\ldots;\ \frac{2S}{19};\ \frac{S}{19};\ \mathbf{0}.$$

Пусть $\mathbf{k = 1 + \frac{r}{100}}$, тогда долг на 1-е число каждого месяца равен:

$$\mathbf{kS};\ \frac{18kS}{19};\ \ldots\ldots\ \frac{2kS}{19};\ \frac{kS}{19}.$$

Значит, выплаты со 2-го по 14-е число каждого месяца составляют:

$$\mathbf{(k-1)S + \frac{S}{19};\ \frac{18(k-1)S+S}{19};\ \ldots\ldots;\ \frac{2(k-1)S+S}{19};\ \frac{(k-1)S+S}{19}}.$$

Общая сумма выплат составляет:

$$\boldsymbol{S + S(k-1)\left(1 + \frac{18}{19} + \frac{17}{19} + \cdots + \frac{2}{19} + \frac{1}{19}\right) = S\big(1 + 10(k-1)\big)}.$$

Общая сумма выплат на 30% больше суммы, взятой в кредит, поэтому

$10(k-1) = 0,3$; $k = 1,03$; $r = 3$.

Ответ: 3%.

Модель №2. «Кубики».

Пусть k = 1 + 0,01r – коэффициент, показывающий, в какое число раз увеличивается сумма долга после начисления процентов по сумме долга, а S_1, S_2, …. S_{19} - ежемесячные выплаты по соблюдению условий банка. Составим схему процесса выплат. Форма таблицы (ширина строки) наглядно демонстрирует изменение долга перед банком.

		0
1.0…		$\frac{(k-1)S}{19}$
15.0..	S_{19}	$\frac{(k-1)S+S}{19}$
1.0…	%	$\frac{2(k-1)S}{19}$
15.0...	S_{18}	$\frac{2(k-1)S+S}{19}$
…….		……
……	S_m	……..
1.03	%	$\frac{18(k-1)S}{19}$
14.03	S_2	$\frac{18(k-1)S+S}{19}$
1.02	%	(k-1)S
14.02	S_1	(k-1)S+$\frac{S}{19}$
15.01		S

Выразим общую сумму выплат и сравним её с условием.

$$\boldsymbol{S + S(k-1)\left(1 + \frac{18}{19} + \frac{17}{19} + \cdots + \frac{2}{19} + \frac{1}{19}\right) = S\big(1 + 10(k-1)\big)}.$$

10(k-1) = 0,3;

Вернёмся к замене **k = 1 + 0,01r.**

10(1+0,01r – 1) = 0,3

0,1r = 0,3

r = 3

Ответ: 3%.

Глава III. Применение оптимальных моделей к решению конкретных задач.

3.1 Задачи на простые проценты.

Задачи подобного типа, на мой взгляд, удобнее всего, а главное быстрее (ведь моя задача на экзамене как можно быстрее решить тестовую часть, чтобы осталось больше времени на задания с развернутым ответом) решать с помощью математической модели «Пропорция». Наверное, я так привык решать подобные задачи, хотя по схеме понятнее, и начинать учиться решать задачи на проценты лучше таким способом.

Задача 1. ***(Вариант 15. КИМ ЕГЭ – 2021)***[1].

Часы стоили 1200 рублей. После снижения цены они стали стоить 972 рубля. На сколько процентов была снижена цена на часы?

Решение.

Процент будем искать от цены покупки, которая составляет 1200 рублей.

Если новая цена - 972 рубля, то скидка составила 1200 – 972 = 228 рублей.

Составим пропорцию, которая будет являться математической моделью:

1200 рублей – 100%

228 рублей – х%

Выразим $\boldsymbol{x}$: $\boldsymbol{x} = \frac{\mathbf{228 \cdot 100}}{\mathbf{1200}}$ = 19 (%) – скидка.

Ответ: 19%.

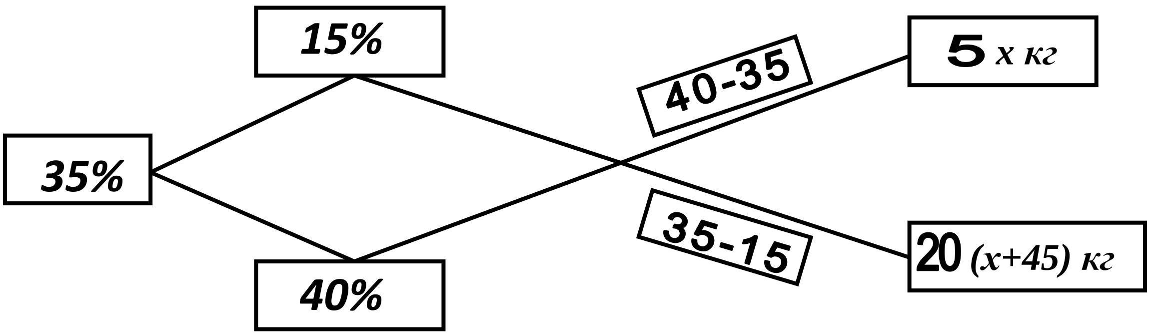
3.2 Задачи на смеси и сплавы, содержащие проценты.

Задачи подобного типа удобнее всего решать с помощью математической модели «Рыба»

Задача 11. ***(Вариант 19. КИМ ЕГЭ – 2021)***[1].

Имеется два сплава. Первый сплав содержит 15% меди, второй – 40% меди. Масса второго сплава больше массы первого на 45 кг. Из этих двух сплавов получили третий сплав, содержащий 35% меди. Найдите массу третьего сплава. Ответ дайте в килограммах.

Внесем данные из задачи в схему.



Пусть ***x кг*** - масса первого сплава, тогда масса второго сплава ***(x+45) кг***.

Составим пропорцию: $\frac{5}{20} = \frac{x}{x+45}$. Решив данное уравнение, получаем

x = 15 (кг) – масса первого сплава, тогда масса второго сплава:

15+45 = 60 (кг).

Отвечаем на вопрос задачи. Для этого сложим полученные массы:

60+15 = 75 (кг) – третий сплав.

Ответ: 75 кг.

3.3 Задачи на сложные проценты.

Задача № 17. (профильный уровень). *(СтатГрад от 26.01.2017 г.)*

По бизнес-плану предполагается вложить в четырёхлетний проект целое число миллионов рублей. По итогам каждого года планируется прирост средств вкладчика на 20 % по сравнению с началом года. Начисленные проценты остаются вложенными в проект. Кроме этого, сразу после начислений процентов нужны дополнительные вложения: по 20 миллионов рублей в первый и второй годы, а также по 10 миллионов в третий и четвёртый годы. Найдите наименьший размер первоначальных вложений, при котором они за два года станут больше 100 миллионов, а за четыре года станут больше 170 миллионов рублей.

Составим схему ***«Кубики»***. Форма таблицы через зрение подсознательно даёт представление о росте вклада (увеличивается ширина строки).

4 год	**кон.**	$\mathbf{S_4=(1 + 0,01n)S_3 + b}=(1 + 0,01n)((1 + 0,01n)((1 + 0,01n)((1 + 0,01n)S + a) +b)+b$
	нач.	$\mathbf{S_3=(1 + 0,01n)\ S_2 + b}=(1 + 0,01n)((1 + 0,01n)((1 + 0,01n)S + a) +b)$
3 год	**кон.**	$\mathbf{S_3=(1 + 0,01n)\ S_2 + b}=(1 + 0,01n)((1 + 0,01n)((1 + 0,01n)S + a) +b)$
	нач.	$\mathbf{S_2=(1 + 0,01n)S_1 + a}=(1 + 0,01n)((1 + 0,01n)S + a)$
2 год	**кон.**	$\mathbf{S_2=(1 + 0,01n)S_1 + a}=(1 + 0,01n)((1 + 0,01n)S + a)$
	нач.	$\mathbf{S_1=(1 + 0,01n)S + a}$
1 год	**кон.**	$\mathbf{S_1=(1 + 0,01n)S + a}$
	нач.	$\mathbf{S}$

(для полного понимания курсивом выделена «расшифровка» понятия «процент», чтобы увидеть сложность алгебраических выкладок).

n% = 1 + 0,01n - ежегодный прирост в конце года;

a – доплата после начисления процентов в течение 1 и 2 года;

b – доплата после начисления процентов в течение 3 и 4 года;

S – первоначальный вклад;

$\mathbf{S_1, S_2, S_3, S_4}$ – сумма на счёте в конце года соответственно году.

Осталось подставить данные в схему.

$\mathbf{S_1 = (1 + 0,01 \cdot 20)S + 20 = 1,2S + 20;}$

$\mathbf{S_2 = (1 + 0,01n)S_1 + a = 1,2\ (1,2S + 20) + 20=1,44S + 24 +20= 1,44S + 44;}$

$\mathbf{S_3 = (1 + 0,01n)S_2 + b = 1,2(1,44S + 44) + 10 = 1,728S + 52,8 + 10 = 1,728S +62,8;}$

$\mathbf{S_4 = (1 + 0,01n)S_3 + b = 1,2(1,728S +62,8) + 10 = 2,0736S + 75,36 + 10 =2,0736S + 85,36.}$

Выберем интересующие нас условия.

$S_2 > 100$; => $1{,}44S + 44 > 100$; => $1{,}44S > 56$; => $S > \frac{56}{1{,}44}$; $S > 38{,}88\ldots$.

$S_4 > 170$; => $2{,}0736S + 85{,}36 > 170$; => $2{,}0736S > 84{,}64$; => $S > \frac{84{,}64}{2{,}0736}$;

$S > 40{,}81\ldots$.

Чтобы выполнились оба условия необходимо (целое число миллионов) не менее 41 млн. рублей.

Ответ: 41 млн.

Заключение.

В результате исследования были получены следующие результаты:

1. Был рассмотрен процесс математического моделирования и этапы создания модели для задач на проценты.
2. Я научился составлять математические модели различного типа.
3. В ходе исследования была опровергнута гипотеза, о существовании универсальной математической модели для решения всех типов задач.
4. Был выявлен оптимальный метод математического моделирования для решения конкретных типов задач.

На мой взгляд, в настоящее время просто необходимо умение составления математических моделей, ведь если оглядеться по сторонам, то можно увидеть, что значок процента «%» смотрит на нас с рекламных плакатов, в новостях проценты сразу бросаются в глаза, когда речь идет о повышении цен на товары или коммунальные услуги. Разве возможно понять всю эту информацию, если уметь решать задачи с процентами? Ответ на этот вопрос очевиден: конечно, нет. Благодаря своему исследованию, я убедился в том, что математическое моделирование в значительной степени упрощает решение задач на проценты. Поменялось восприятие, казалось бы, известного понятия. Я научился составлять модели задач типа №17 ЕГЭ, а значит, на экзамене я не потеряю время и наберу «драгоценные» 3 балла!

Используемая литература:

1. ЕГЭ. Математика. Профильный уровень: типовые экзаменационные варианты: 36 вариантов / под редакцией И.В Ященко. – М.: Издательство «Национальное образование», 2021. – 256 с. – (ЕГЭ. ФИПИ – школе).

2. http://www.pedsovet.info/info/pages/referats/info_00002.htm.

3. http://studopedya.ru/1-64242.html.