Научно-исследовательская работа

Прикладная математика

Название работы: **«Векторное сложение фигур на плоскости»**

***Выполнил*:**

Беглов Никита Владимирович,

учащийся 11 класса

МКОУ СОШ 8 с Тугулук

Грачевского муниципального

района Ставропольского края

Руководитель:

Шеховцова Елена Сергеевна,

учитель математики МКОУ

СОШ 8 с Тугулук, высшая

квалификационная категория

2020г.

Оглавление

Введение

Обычно требуется сложить, например, из трех одинаковых треугольников трапецию или из четырех уголков уголок вдвое большего размера.

В работе исследуется сложение другого рода. Суммой двух треугольников, как правило, будет выпуклый шестиугольник, суммой двух одинаковых кругов – круг вдвое большего радиуса, а суммой двух отрезков – параллелограмм.

Чтобы отличить такую операцию от обычного объединения, ее называют векторной суммой или суммой Минковского.

Пусть заданы две фигуры F и G. Назовём *полусуммой* этих фигур множество всех середин отрезков, один конец которых принадлежит F, а другой – G. Что является полусуммой двух отрезков? Какие фигуры могут быть полусуммами многоугольников?

Цель исследования: определение вида множества, получающегося при сложении плоских фигур.

Задачи исследования:

1) Выполнить построения полусумм различных комбинаций фигур в программе «Живая геометрия».
2) Изучить литературные источники о данной операции и применении ее в современной науке и технике.
3) Выполнить оценку количества сторон полусуммы n-угольников.

Гипотеза: количество сторон полусуммы n- угольника и m- угольника может быть любым числом, которое не больше $n + m$ и не меньше, чем наибольшее из чисел n, m.

Методы исследования:

1) Изучение литературы и других источников информации.

2) Математический эксперимент в программе динамического построения «Живая геометрия», версия 4.04.
3) Анализ и обобщение результатов, доказательство.

Объект исследования: полусумма и сумма фигур.

Предмет исследования: векторное сложение фигур на плоскости.

I. Полусумма двух фигур

Задача 1. Даны два отрезка: AB и CD . Найти множество точек, в которые может попасть середина отрезка, один конец которого P лежит на AB, а другой конец G- на CD.

Решение. Рассмотрим сначала общий случай, когда отрезки AB и CD не параллельны. Обозначим середину отрезка PQ через M. Зафиксируем сначала положение точки Q.

Если P пробегает весь отрезок CB, то при этом M пробегает среднюю линию треугольника ABC (рис.1а) –отрезок с концами в серединах отрезков AC и AB.

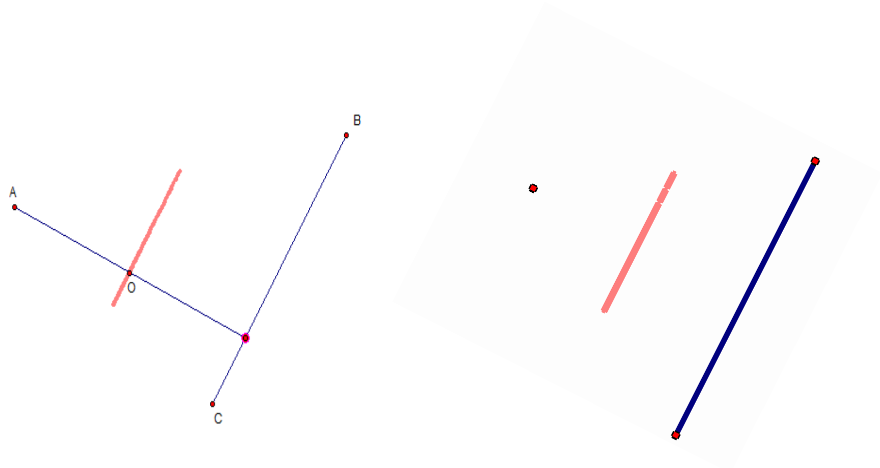


Рис.1а. Полусумма точки и отрезка

Если теперь заставить точку Q пройти весь отрезок CD, то средняя линия треугольника QAB , очевидно, изобразит целый параллелограмм (рис.1б)- вершинами его будут середины отрезков AC, AD, BC и BD.

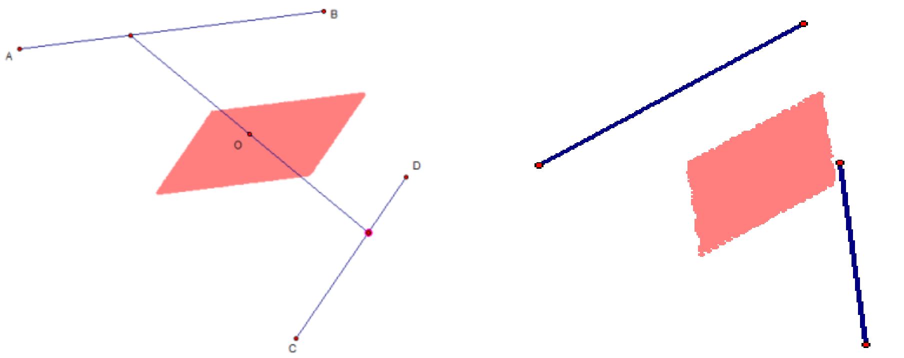


Рис.1б. Полусумма непараллельных отрезков

Заметим, что если AB и CD пересекаются, то искомое множество – параллелограмм с вершинами в серединах сторон выпуклого четырехугольника ABCD, а если AB и CD не лежат в одной плоскости, то наш параллелограмм получится в сечении тетраэдра ABCD плоскостью, параллельной AB и CD и проходящей посередине между ними.

Выясним, во что превратится этот параллелограмм, когда отрезки AB и CD параллельны. (Можно считать, что они и одинаково направлены.) Если AB и CD принадлежат различным параллельным прямым, то ABDC - трапеция, а середины M отрезков PQ заполняют среднюю линию этой трапеции.(рис.1в)- отрезок с концами в серединах отрезков AC и BD.

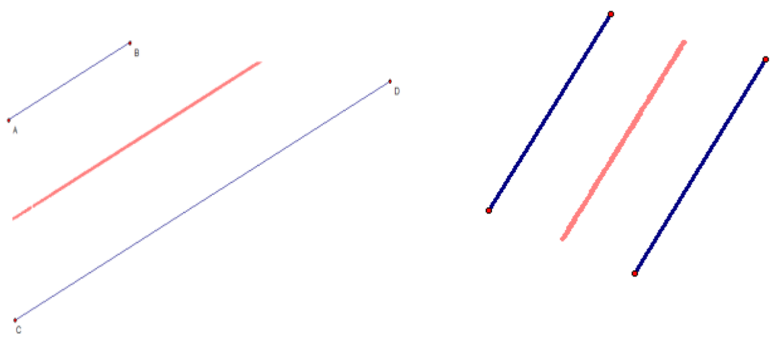


Рис.1в. Полусумма параллельных отрезков

Такой же ответ получается и в том случае, когда AB и CD принадлежат одной прямой. Здесь, чтобы не разбирать различных расположений точек A,B,C,D на прямой, удобно перевести задачу на язык алгебры. Будем считать , что наша прямая- числовая ось, координаты данных точек -kA,kB,kC,kd (kA< kB,kC<kD) , и воспользуемся таким фактором : множество чисел (Xp+Xq)/2, где Xp∈ [kA,kB] , Xq∈ [kC,kD]- отрезок [(kA+kB)/2, (kC+kD)/2]. Заметим, что длина полученного отрезка равна (AB+CD)/2.

Определение 1 .Пусть заданы две фигуры F и G (два множества точек на плоскости или в пространстве).

Назовем полусуммой этих фигур множество всех середин отрезков, один конец которых принадлежит F, а другой – G. Обозначим это множество так: F*G.

Пример 1.

а) Если и F , и G состоят из одной точки: F={P}, G={Q}, то F*G- тоже одна точка (середина отрезка PQ). Будем обозначать ее P*Q .

б) Если F - отрезок, G- одна точка (F=AB,G={Q},рис. 1а) ,то F*G- отрезок длины AB/2.

в) Если F и G – параллельные отрезки AB и CD, то F*G- параллельный им отрезок длины (AB+CD)/2 (средняя линия, рис.1в,1г).

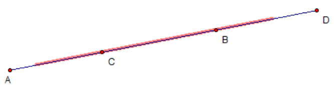


Рис.1г.

г) Если F и G – непараллельные отрезки: F=AB, G=CD, то F*G- параллелограмм с вершинами A*C, A*D, B*D, B*C (рис.1б).

Пример 2. Полусумма двух прямоугольников F и G размерами а х в и с х в, у которых стороны а и с параллельны, - прямоугольник размерами (a+c)/2 x (b+d)/2 (рис.2).

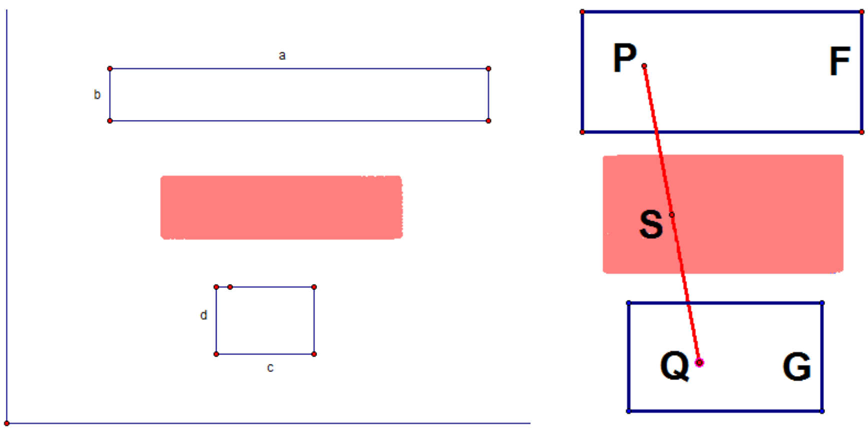


Рис.2. Полусумма прямоугольников с параллельными сторонами

Действительно, в системе координат Oxy, у которых ось Ox параллельна сторонам a и c, координаты x точек прямоугольников F и G пробегают отрезки длинной a и c, координаты y- отрезки длиной b и d, а полусуммы этих координат – отрезки соответственно длиной (a+c)/2 и (b+d)/2.

Решим задачу 2. Найдите полусумму следующих двух фигур:

а) двух непараллельно расположенных прямоугольников;

б) правильного треугольника и его стороны ;

в) квадрата и правильного треугольника , имеющих одну общую сторону ;

г) отрезка и круга;

д) двух окружностей разного радиуса;

е) полуокружностей, составляющих вместе окружность;

ж) полуокружности с самой собой;

Решение:

2а): зафиксируем точку P прямоугольника F (рис.3).

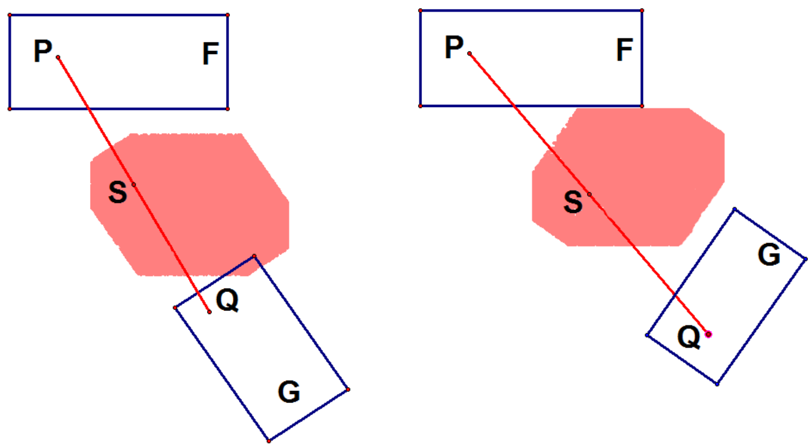
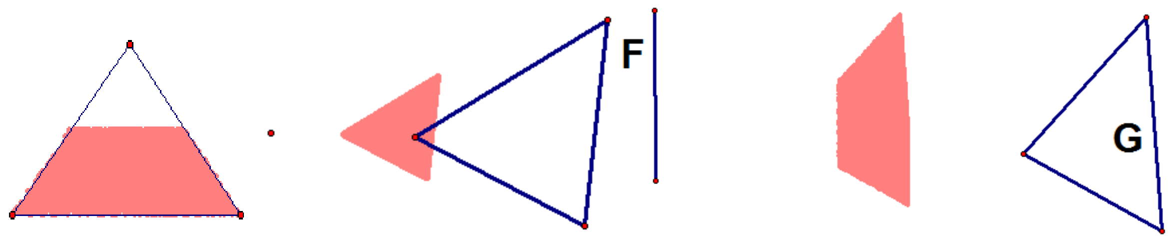


Рис.3. Полусумма двух прямоугольников с непараллельными сторонами

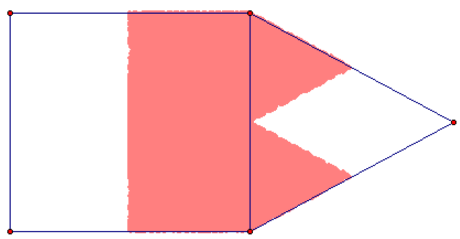
Тогда множество точек P,Q где Q пробегает G , - прямоугольник P,Q гомотетичный G,с коэффициентом ½ (и с центром гомотетии P) . Мы должны теперь взять объединение всех прямоугольников P*G где P пробегает F. Не трудно видеть , что нужное объединение F+G (фигура, заметаемая голубым прямоугольником на рис.3, когда нижняя синяя вершина пробегает розовый прямоугольник, гомотетичный прямоугольнику F с коэффициентом подобия ½)- выпуклый восьмиугольник, стороны которого параллельны сторонам данных прямоугольников, а по длине равны их половинам. Сопоставляя задачу 2а с предшествующим ей рисунком 2, мы видим, что форма фигуры F*G может существенно измениться при повороте одной из фигур F или G .

2б):

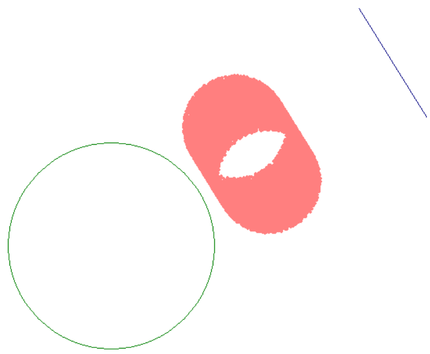


Полусумма теугольника и отрезка

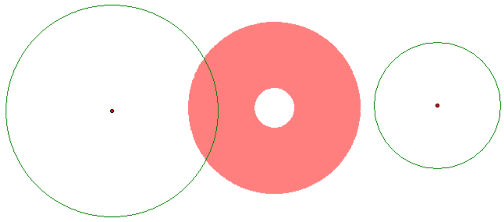
2в):



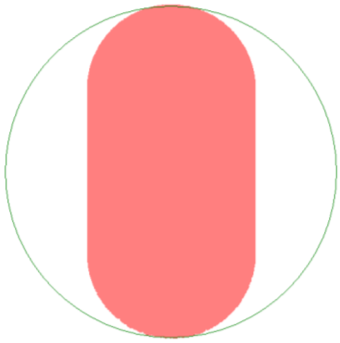
2г):



2д):



2е):



2ж)

II. Количество сторон полусуммы выпуклых многоугольников

Множество точек F называется выпуклым, если для любых двух точек P и Q из F весь отрезок PQ содержится в F.

Находить полусумму выпуклых фигур проще, чем не выпуклых, причем если F и G – выпуклые фигуры, то F*G- тоже выпукло.

Доказательство. Пусть M1 и M2 – произвольные точки из F*G. Тогда M1=P1*Q1, M2=P2*Q2 при некоторых P1∈F ,P2∈F,Q1∈G,Q2∈G.

Поскольку F и G выпуклы, то P1 P2 ⊂ F и Q1 Q2 ⊂ G . Тогда P1 P2 * Q1 Q2 F*Q. Но полусумма отрезков – параллелограмм, причем точки M1 и M2 – его вершины (параллелограмм может выродиться в отрезок, содержащий точки M1 и M2). Раз фигура F*G содержит этот параллелограмм, она содержит и отрезок M1M2: F*G ⊃ (P1P2*Q1Q2) ⊃ (M1M2).

Из примеров, встретившихся в задачах 2а)- и), видно, что полусумма выпуклых многоугольников F и G – многоугольник, стороны которого параллельны сторонам F и G , но вдвое короче.

Докажем, что если *G* и F — выпуклые многоугольники, то *G* * *F* — выпуклый многоугольник, число сторон которого не превосходит суммы чисел сторон многоугольников *G* и F.

Пусть $A_1 * A_2$ и $B_1 * B_2$ — точки фигуры *G* * F. Тогда фигура *G* * F содержит параллелограмм с вершинами $A_1 * A_2$, $B_1 * A_2$, $B_1 * B_2$, $B_1 * A_2$. Выпуклость фигуры *G* * F следует из того, что она содержит диагональ этого параллелограмма.

Отсюда следует, что:

а) количество сторон полусуммы n-угольника m- угольника может быть любым числом, которое не больше n+m и не меньше, чем наибольшее число из чисел n и m.

б) периметр F*G равен полусумме периметров F и G.

III. Сумма Минковского и полусумма фигур

В предыдущих разделах рассмотрена полусумма фигур и заменяющий ее значок *. Выясним, что такое сумма двух фигур.

Зафиксируем некоторую точку O (начало отсчета или полюс).

Определение 2. Множество всех концов M векторов $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}$, где P и Q – произвольные точки фигур F и G соответственно, называется суммой (или суммой Минковского) фигур F и G. Сумма F и G обозначается F+G. (Рис. 3)

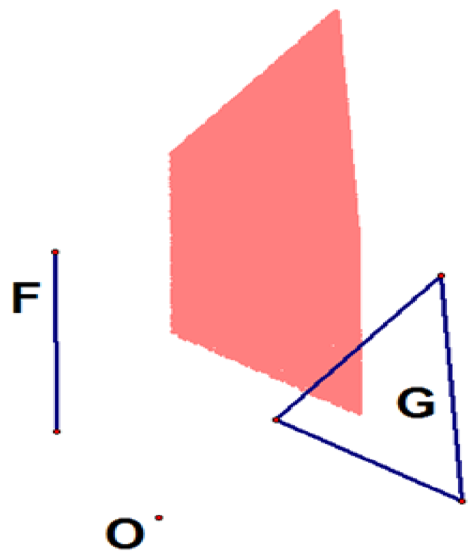


Рисунок 3. Сумма Минковского отрезка F и треугольника G.

Определение 3. Множество во всех концах M векторов $\overrightarrow{OM}=\lambda\cdot\overrightarrow{OP}$, где P – произвольная точка фигуры F, λ- данное положительное число, называется произведением F на λ. Эта фигура обозначается λF.

Пример 3. Полусумма F*G есть как раз ½ ($F_1 + F_2$) : ведь условие $\overrightarrow{OM}= {}^1/_2$ ($\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}$) означает, что M - середина отрезка PQ.

Фигуру $\lambda F + \mu G$, где λ и μ - положительные числа, будем называть линейной комбинацией фигур F и G.

Пример 4. Линейная комбинация $\lambda F + \mu G$ прямоугольников $a\times b$ и $c\times d$, у которых сторона a и c параллельны – прямоугольник $(\lambda a+\mu c)\times(\lambda b+\mu d)$.

Заключение

В работе была исследована векторная полусумма плоских фигур, были определены виды множеств, получающихся при сложении плоских фигур с помощью программы «Живая геометрия», выполнена оценка количества сторон полусуммы n-угольников.

Гипотеза о том, что количество сторон полусуммы n- угольника и m-угольника может быть любым числом, которое не больше n_+ m и не меньше, чем наибольшее из чисел n , m, подтвердилась.

Сумма Минковского позволяет решать задачу Motion Planning, в случае, когда робота нельзя поворачивать. Таким образом, каждой точке ставится в соответствие фигура робота с точкой привязки, помещенной в точку.

Планирование движения, также известное как проблема навигации, этот термин используется в робототехнике, чтобы найти последовательность действительных конфигураций, которая перемещает робота от источника к месту назначения.

Планирование движения включает в себя приложения в других областях, таких как анимация цифровых персонажей, видеоигры, искусственный интеллект, архитектурный дизайн.

Поиск оптимального расположения груза, раскроя материала и моделирования подобных процессов приводит к вопросу о непересечении предметов или заготовок.

Список литературы

1. Л.С. Атанасян и другие. «Геометрия». Учебник для 10-11 классов М.: «Просвещение», 2018.
2. Сгибнев А.И. Исследовательские задачи для начинающих.М.- МЦНМО, 2015.
3. Н.Б. Васильев. Сложение фигур. Ж. Квант, №4, 1976г.
4. Савин А.П. Энциклопедия юного математика. Электронная библиотека «Альтернатиная наука», 2008
5. А. Кушнир. Кружок по математике, 11 класс. Центр педагогического мастерства, 2018.
6. Г. Ю. Панина. Алгебра многогранников. Ж. Математическое просвещение, сер. 3, вып. 10,2006 (109-131).
7. Интернет-проект «Задачи». Ссылка: http://www.problems.ru/view_problem_details_new.php?id=58138
8. Е. Адищев, Е. Адищева, М. Мусин, К. Балакин. Занятие 9. Сумма Минковского. Малый мехмат МГУ, 2002–∞.

9. В.В. Остапенко, И.Л. Якунина. Функция Минковского в задачах упаковки. Системні дослідження та інформаційні технології, 2010, № 3.